

## Chapitre III : Transformée en z : propriétés et applications

### III.1 Définitions

C'est l'outil principal de l'analyse des systèmes échantillonnés possédant une entrée et une sortie. Elle est analogue de la transformée de Laplace des systèmes continus.

La forme standard de la transformée en Z est :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

#### Exemple 1

Si  $X(z) = 1 - z^{-1} + 0.5 z^{-2}$ , on a

C'est la transformée en Z du signal échantillonné suivant :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = -1 \\ x(2) = 0.5 \\ x(k) = 0, \forall k > 2 \end{cases}$$

#### Exemple 2

Calculer la transformée en z du signal suivant :

$$x(k) = a^k, \quad \forall k \geq 0$$

La transformée en z est :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{si } \left| \frac{a}{z} \right| < 1$$

### III.2 Propriétés de la transformée en z

$x(k)$  et  $h(k)$  fonctions échantillonnées,  $X(z)$  et  $H(z)$  leur transformées en z.

Propriété	Signal	Transformée en z
Linéarité	$ax(k) + bh(k)$	$aX(z) + bH(z)$
Déphasage	$x[k - s]$	$z^{-s}X(z)$
Déphasage	$x[k + s]$	$z^{+s}X(z)$
Réflexion	$x[-k]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Echelonnage	$a^k x[k]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$

Convolution	$x(k) * h(k)$	$X(z) \times H(z)$
-------------	---------------	--------------------

**Tableau III.1** – Propriétés de la transformée en  $z$

### Théorème de la valeur initiale et finale

Le théorème de la valeur initiale est :

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Le théorème de la valeur finale est :

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

### III.3 Transformée en Z des signaux élémentaires

#### Impulsion unité $\delta(k)$

$$\delta(0) = 1 \text{ et } \delta(k) = 0 \text{ pour } k > 0$$

$$Z[\delta(k)] = \delta(0) = 1$$

#### Echelon unité $u(k)$

$$Z[u(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k}$$

Est une série géométrique de raison  $z^{-1}$ , d'où

$$Z[u(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

#### Signal rectangulaire $rect(k)$

$$Z[rect(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(K-1)}$$

$$Z[rect(k)] = \frac{1 - z^{-K}}{1 - z^{-1}}$$

#### Signal exponentiel

$$Z[e^{-\alpha kT} u(k)] = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1
$\delta(kT - k_0T)$	$z^{-k_0}$
$U(k) = 1$	$\frac{z}{z - 1}$
$kT$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$

$e^{-akT}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

### **III.4 Transformée en z inverse**

Le calcul de la transformée inverse  $x(k)$  d'une fonction  $X(z)$  peut se faire selon deux méthodes :

1. Par décomposition en éléments simples de  $X(z)/z$  puis en utilisant la table de transformées.

#### **Exemple**

$$X(z) = \frac{2z}{(z - 1)(z - 0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{4}{z - 1} - \frac{4}{z - 0.5}$$

$$x(k) = 4 - 4(0.5)^k$$

2. On peut aussi calculer les premières valeurs de  $x(k)$  en effectuant une division de polynômes :

#### **Exemple**

$$X(z) = \frac{z}{z-2} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} \dots \dots \dots$$

On retrouve les premières valeurs de  $x(k)$  :  $x(0) = 1$  ;  $x(1) = 2$  ;  $x(2) = 4$ .