

Série n°1

Exercice 1 Soient E_1, E_2, \dots, E_n , n ensembles munis respectivement des relations d'équivalences R_1, R_2, \dots, R_n , sur $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ on définit une relation R par :

$$xRy \iff x_1R_1y_1, x_2R_2y_2, \dots, x_nR_ny_n.$$

avec $(x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in E \times E$.

- 1) Montrer que R définit sur E une relation d'équivalence.
- 2) Montrer que les ensembles E/R et $E_1/R_1 \times \dots \times E_n/R_n$ sont canoniquement équipotents.

Exercice 2 Vérifier si dans $M_n(K)$ (resp. $GL_n(K)$) les relations

$$MR_1N \iff \exists P \in GL_n(K) \text{ tel que } M = PNP^{-1}$$

$$MR_2N \iff \exists P \in GL_n(K) \text{ tel que } M = PNP^t$$

$$MR_3N \iff \exists P \in GL_n(K) \text{ avec } \det P = 1, \text{ tel que } M = NP$$

sont des relations d'équivalence.

Exercice 3 Décomposer l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$.

Exercice 4 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble A . Rappelez la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une bijection entre l'ensemble quotient A/\mathcal{R} et un ensemble B donné.

Exercice 5 Soit la partition $(E_x)_{x \in [0,1]}$ définie par $E_x = \{x\}$ si $x \in]0,1[$ et $E_0 = E_1 = \{0,1\}$; soit \mathcal{R} la relation d'équivalence que définit cette partition. Montrer que l'ensemble quotient $[0,1]/\mathcal{R}$ est en bijection avec le cercle S^1 .

Exercice 6 Soit A une partie d'un ensemble E et soient les applications

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) & \text{et} & & g : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto A \cap X & & & X &\longmapsto A \cup X \end{aligned}$$

a) Déterminer :

- i) Les fibres $f^{-1}(Y)$ et $g^{-1}(Y)$ pour Y dans $\mathcal{P}(E)$.
- ii) $f(\mathcal{P}(E))$ et $g(\mathcal{P}(E))$.
- iii) Les relations d'équivalence \mathcal{R} et \mathcal{S} associées respectivement aux applications f et g .
- iv) Les ensembles quotients $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S}$.

b) Montrer les bijections $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} \sim \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(E)/\mathcal{S} \sim \mathcal{P}(E - A)$.

Exercice 7 Sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$, on définit la relation d'équivalence \mathcal{R} par :

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \mathcal{R} (b_1, \dots, b_{n+1}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } (a_1, \dots, a_{n+1}) = \lambda (b_1, \dots, b_{n+1}).$$

L'ensemble quotient $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\} / \mathcal{R}$ est appelé **n -espace projectif** et est noté \mathbb{P}^n ; la classe de (a_1, \dots, a_{n+1}) est notée $\overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}$.

a) Soit l'application Ψ de \mathbb{C}^n dans \mathbb{P}^n définie par : $\Psi((a_1, \dots, a_n)) = \overline{(a_1, \dots, a_n, 1)}$. Montrer que Ψ est une injection et qu'il existe une bijection entre $\mathbb{P}^n \setminus \Psi(\mathbb{C}^n)$ et \mathbb{P}^{n-1} .

b) Soit \mathcal{S}^{2n+1} l'ensemble des éléments $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ de norme 1. L'ensemble \mathcal{S}^1 est un groupe multiplicatif et opère sur \mathcal{S}^{2n+1} par :

$$(z, (a_1, \dots, a_{n+1})) \mapsto (za_1, \dots, za_{n+1})$$

Soit \mathcal{T} la relation d'équivalence associée à cette opération et soit l'application Φ de \mathcal{S}^{2n+1} dans \mathbb{P}^n définie par :

$$\Phi((a_1, \dots, a_{n+1})) = \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}$$

Montrer en utilisant l'application Φ , qu'il existe une bijection entre $\mathcal{S}^{2n+1}/\mathcal{T}$ et \mathbb{P}^n .

f(x) = f(0)

5322

Série n°2

Exercice 1 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . On note par R_g (resp. R_d) la relation à gauche (resp. à droite) associée au sous-groupe H dans G .

- a) Montrer que H est distingué dans G si et seulement si H est le noyau d'un morphisme de groupes dont le groupe de départ est G .
- b) Montrer l'équivalence des propositions suivantes
- i) H est normal dans G ;
 - ii) Les deux relations d'équivalence R_g et R_d sont identiques;
 - iii) R_g est compatible avec la loi de G ;
 - iv) R_d est compatible avec la loi de G .

Exercice 2 Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G . Montrer alors que H est distingué dans G .

Exercice 3 Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes et x un élément de G .

- a) Montrer que si l'ordre de x est fini, alors il l'est aussi pour $f(x)$ et que dans ce cas $\text{ord}(f(x))$ divise $\text{ord}(x)$.

b) Comparer $\text{ord}(x)$ et $\text{ord}(f(x))$ dans le cas où f est un monomorphisme.

On rappelle que l'exposant d'un groupe G est par définition le plus petit entier positif n non nul (s'il existe) tel que pour tout $x \in G$, $\text{ord}(x)$ divise n . Si cet exposant n'existe pas, on dit que G est d'exposant ∞ .

- b) Montrer que l'exposant de tout groupe fini existe et fini.
- c) Montrer que pour un groupe fini G , l'exposant de tout sous-groupe et de tout groupe quotient de G divise l'exposant de G .

- d) Donner un exemple de groupe dont l'exposant est infini.
- e) Chercher l'exposant des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et S_3 .

Exercice 4 Soit G un groupe. Montrer que si l'ordre de tout élément de G est 2, alors G est un groupe abélien.

Exercice 5 (Théorème de Cauchy) Soit G un groupe **abélien** fini d'ordre n . Montrer, en utilisant une démonstration par récurrence, que pour tout nombre p premier divisant n , il existe un élément de G d'ordre p . En particulier un sous-groupe d'indice $\frac{n}{p}$.

Exercice 6 Dresser la table de multiplication de S_3 et vérifier que ce groupe n'est pas abélien.

Exercice 7 Soit G un groupe d'ordre 6.

a) Montrer que si G est abélien alors G est cyclique.

b) Montrer que si G est non abélien alors G est isomorphe à S_3 (préciser l'isomorphisme).

c) Conclure sur la structure des groupes d'ordre 6.

Exercice 8 (Produit direct externe) Soient G et H deux groupes dont les lois sont notées multiplicativement. On pose :

$$(a, a') \times (b, b') = (ab, a'b').$$

a) Montrer que la loi \times muni $G \times H$ d'une structure de groupe.

b) Montrer que le groupe $G \times H$ est abélien si et seulement si G et H le sont.

c) Montrer que l'hypothèse G et H sont cycliques n'entraîne pas toujours que le groupe $G \times H$ est cyclique.

d) Donner une condition suffisante sur les ordres de G et H afin que l'implication ci-dessus soit vraie.

Série n°3

Exercice 1 *Propriété universelle du quotient.* Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et $s : G \rightarrow G/H$ la surjection canonique. On considère un groupe G_1 , $f : G \rightarrow G_1$ un morphisme de groupes et e, e_1 les éléments neutres respectifs de G et G_1 .

1) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i) Il existe une application $\bar{f} : G/H \rightarrow G_1$ telle que $f = \bar{f} \circ s$.

ii) $H \subset \ker f$.

iii) $f(H) = \{e_1\}$.

2) Montrer que lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application \bar{f} est uniquement définie et que c'est un morphisme de groupes. Vérifier que $\text{Im } \bar{f} = \text{Im } f$ et $\ker \bar{f} = \ker f/H$ et que $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ pour tout $x \in G$, où $\bar{x} = s(x)$ désigne la classe de x dans G/H .

Exercice 2 Soient G un groupe et $G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$. G' s'appelle le *groupe des commutateurs* ou *sous-groupe dérivé* de G , noté aussi $D(G)$ ou $[G : G]$.

1) Montrer que pour tout endomorphisme de G , on a $f(G') \subset G'$. En déduire que G' est distingué dans G .

2) Soit H distingué dans G . Montrer que G/H est abélien si et seulement si $G' \subset H$.

3) En déduire que pour tout homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow G_1$, avec G_1 abélien, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : G/G' \rightarrow G_1$ tel que $\bar{f} \circ s = f$ où $s : G \rightarrow G/G'$ est l'homomorphisme canonique.

Exercice 3

1) Déterminer tous les éléments de A_4 .

2) Soient $c = (ijk)$ un 3-cycle élément de S_4 et $\sigma \in S_4$. Calculer $\sigma c \sigma^{-1}$.

3) Montrer que A_4 ne possède pas de sous-groupes d'ordre 6.

Indication : faire un raisonnement par l'absurde, utiliser 2) pour $\sigma_1 = (ijl)$ et $\sigma_2 = (ilj)$, où $l \notin \{i, j, k\}$.

Exercice 4

1) Montrer que tout groupe abélien d'ordre pq est cyclique, où p et q sont des nombres premiers.

- 2) Existe-t-il des groupes non abéliens d'ordre pq ?
- 3) Donner (à isomorphisme près) tous les groupes abéliens d'ordre 2013.
- 4) Décrire (à isomorphisme près) les différents groupes abéliens d'ordre $2025 = 3^4 5^2$.
- 5) Identifier les groupes suivants :
 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$,
 $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et
 $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- 6) Existe-t-il des groupes non cycliques d'ordre 2013?

Exercice 5

- 1) Montrer qu'il n'existe aucun morphisme d'anneaux unitaires de \mathbb{Q} (resp. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n > 1$) dans \mathbb{Z} .
- 2) Montrer que l'unique morphisme d'anneaux unitaires $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ vérifie que pour tous morphismes d'anneaux unitaires $g, h : \mathbb{Q} \rightarrow A$ tel que $g \circ f = h \circ f$, on a $h = g$.

Exercice 6

Soit p un nombre premier positif dans \mathbb{Z} . Soit A le sous-ensemble de \mathbb{Q} formé par les éléments $\frac{m}{n}$ avec $(m, n) = 1$ et $(p, n) = 1$.

- 1) Montrer que A est un sous-anneau de \mathbb{Q} .
- 2) Déterminer les éléments inversibles de A .
- 3) Montrer que l'anneau A est principal.
- 4) Quel est le corps des fractions de A ?

Exercice 7

Soient K un corps commutatif, A un K -espace vectoriel de base $\{V, W\}$, on définit une multiplication sur A par :

$$(aV + bW)(cV + dW) = acV + (bc + ad)W.$$

- 1) Montrer que cette multiplication est commutative et associative.
- 2) En déduire que A est un anneau commutatif. L'anneau A admet-il un élément unité?

Exercice 8

Soit $A = \mathbb{Z}[X]$: l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{Z} , et on pose $J = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

- 1) Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
- 2) Montrer que J est engendré par X et 2; c.-à-d. que $J = (X, 2)$.
 Indication : si $P \in J$, écrire P sous la forme $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + 2a_0$.
- 3) En faisant un raisonnement par l'absurde, montrer que J n'est pas un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$; c.-à-d. que pour tout $Q \in \mathbb{Z}[X]$, $J \neq Q\mathbb{Z}[X]$.
- 4) Que peut-on dire alors de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$?

Série n° 1

+ Exercice 1 =

On a $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$
 définit par la relation
 $x R y \Leftrightarrow (x_1 R_1 y_1, x_2 R_2 y_2, \dots, x_n R_n y_n) \quad \forall i \in N.$

$$\begin{aligned} \text{t.p. } x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

1. M.D. R définit une
 relation d'équivalence
 sur E.

+ Rappel :

R est une relation
 d'équivalence \Leftrightarrow

1. R réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E \quad x R x$

2. R symétrique \Leftrightarrow

$$\forall x, y \in E \quad x R y \Leftrightarrow y R x$$

3. R transitive \Leftrightarrow

$$\forall x, y, z \quad x R y \text{ et } y R z \Leftrightarrow x R z$$

+ la classe d'équivalence

$$\bar{x} = \{ y \in E \mid x R y \}$$

$$\text{t.p. } E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$$

$$\begin{aligned} P: \quad E &\longrightarrow E/R \\ x &\longrightarrow \bar{x} \end{aligned}$$

$E \cap F \Leftrightarrow f: E \rightarrow F$
 une bijection

$E \cap F$; $\text{card}(E)$ est la
 classe d'équivalence de E
 $\% \text{ à } N.$

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

$$* \forall 1 \leq i \leq n \quad x_i R_i x_i$$

Donc $x R x$, Ainsi réflexive

$$* \forall x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n) \in E$$

$$\begin{aligned} \text{On a } x R y &\Leftrightarrow (x_1 R_1 y_1, \dots, x_n R_n y_n) \\ &\Leftrightarrow (y_1 R_1 x_1, \dots, y_n R_n x_n) \end{aligned}$$

Donc R est symétrique.

$$* \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \text{ éléments de } E$$

$$(x R y \text{ et } y R z) \Leftrightarrow$$

$$(x_1 R_1 y_1, \dots, x_n R_n y_n) \text{ et } (y_1 R_1 z_1, \dots, y_n R_n z_n)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 R_1 y_1 \text{ et } y_1 R_1 z_1, \dots, x_n R_n y_n \text{ et } y_n R_n z_n)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 R_1 z_1, \dots, x_n R_n z_n)$$

$$\Leftrightarrow x R z, \text{ Donc R est}$$

réflexive transitive

car chaque $R = (R_1, \dots, R_n)$

est transitive.

Alors R est une relation d'équivalence.

2. Soit $\varphi: E/R \rightarrow E_1/R_1 \dots E_n/R_n$ 3 relations sont des relations d'équivalence.

$\forall x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ éléments de E .

$$\text{On a } \bar{x} = \bar{y}$$

$$\Leftrightarrow x R y \Leftrightarrow (x_1 R_1 y_1, \dots, x_n R_n y_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{x}_1 = \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_n = \bar{y}_n)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})$$

On vient de prouver que φ est une application injective.

• On a φ est surjective par construction.

Donc φ est une bijection

Ainsi $E/R \sim E_1/R_1 \dots E_n/R_n$

+ Exercice 2.

Vérifier si dans $M_n(K)$ (resp $GL_n(K)$) que les 3 relations sont des relations d'équivalence.

On a $(M_n(K), +, \cdot)$ un anneau non commutatif et non intègre.

⊕ réponse =

$$* M R, N \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ t.q. } M = P N P^{-1}$$

$\forall M \in M_n(K)$ on a $M = I M I^{-1}$ ou I est la matrice unité carrée d'ordre n . Donc $M R, N$ c-à-d R est réflexive.

$$* \text{ Soient } M, N \in M_n(K) \text{ alors } M R, N \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ t.q. } P^{-1} M P = N \Rightarrow N = P^{-1} M P \Rightarrow N R, M$$

Donc R est symétrique

* Soient $M, N, L \in M_n(K)$
 $(MR, N \text{ et } NR, L) \Leftrightarrow \exists P, Q \in GL_n(K) (MR, N \text{ et } NR, L) \Leftrightarrow$
 $\exists P, Q \in GL_n(K) \text{ t.q. } M = PN P^{-1} \text{ et}$

$$N = Q L Q^{-1}$$

$$\Rightarrow \exists P, Q \in GL_n(K) : \exists P, Q \in GL_n(K) \text{ t.q.}$$

$$M = P Q L Q^{-1} P^{-1} \quad M = P Q L^+ Q^+ P^{-1} = P Q L^+ (P Q)$$

$$= P Q L (P Q)^{-1} \quad \Rightarrow MR, L$$

$\Rightarrow MR, L$ car $(PQ) \in GL_n(K)$ Donc R_2 est transitive

Donc R_1 est transitive

Alors R_2 est une relation d'équivalence.

Alors R_1 est une relation d'équivalence.

iii. $MR_3 N \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$
 avec $\det P = 1$ t.q. $M = NP$

ii. $MR_2 N \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$
 t.q. $M = P N^+ P$

* $\forall M \in M_n(K)$, on a $M = M I$
 où I la matrice unité carrée d'ordre n . Donc $MR_3 M$
 car $\det I = 1$
 c-à-d R_3 est réflexive.

* $\forall M \in M_n(K)$ on a:
 $M = I M^+ I$ où I
 est la matrice unité carrée d'ordre n .

Donc $MR_2 M$

c-à-d R_2 est réflexive

* Soient $M, N \in M_n(K)$
 alors $MR_3 N \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$
 $\det P = 1 : M = NP \Rightarrow$

* Soient $M, N \in M_n(K)$

alors $MR_2 N \Leftrightarrow \exists P, Q \in GL_n(K)$

$$M = P N^+ P \Rightarrow$$

$$\exists P \in GL_n(K), \det P = 1 :$$

$$N = M P^{-1} \Rightarrow NR_3 M$$

$$\exists P \in GL_n(K) : P^{-1} M (P)^{-1} = P^{-1} M^+ (P^{-1}) \text{ car } P^{-1} \in GL_n(K)$$

$$= N \text{ car } (P^{-1})^{-1} = P$$

$$\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)} = 1$$

Donc R_2 est

symétrique.

Donc R_3 est symétrique.

* Soient $M, N, L \in M_n(K)$
 $(M R_3 N \text{ et } N R_3 L) \Leftrightarrow$
 $\exists P, Q \in GL_n(K), \det P = \det Q = 1$
 et $M = NP$ et $N = LQ \Rightarrow$
 $\exists P, Q \in GL_n(K), \det P = \det Q = 1$
 $M = LQP \Rightarrow M R_3 L$

Car $Q, P \in GL_n(K)$ et
 $\det(QP) = \det Q \cdot \det P = 1$
 Donc R_3 est transitive

Alors R_3 est une relation
 d'équivalence.

+ Comme $GL_n(K) \in M_n(K)$
 alors R_1, R_2, R_3 restent
 des relations d'équivalences
 sur $GL_n(K)$.

+ EX3:

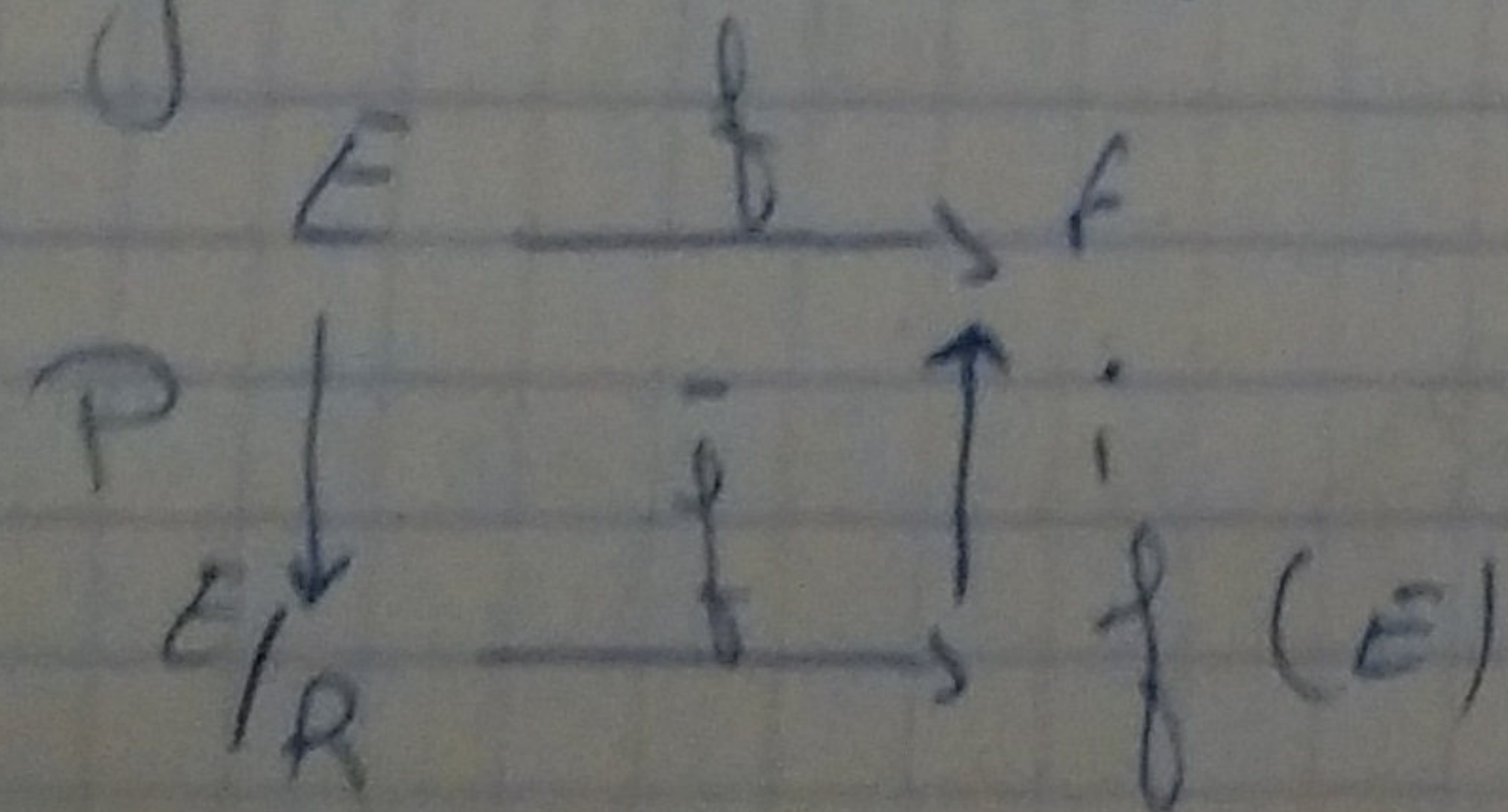
Décomposer l'application f
 définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par
 $f(x) = \cos(x)$.

rappel:

Soit $f: E \rightarrow F$ une application
 R la relation d'équivalence
 associée à f , définie par

$$x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Le Diagramme suivant est commutatif



c-à-d $f = i \circ \bar{f} \circ P$
 $\forall x \in E \quad P(x) = \bar{x}, \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$
 \bar{f} est bijective

Ainsi: $E/R \sim f(E)$

Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x$,
 alors $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et si R
 est la relation d'équivalence
 associée à f , alors $\mathbb{R}/R \sim [-1, 1]$
 $[0, \pi]$ est système de représentants
 pour la relation, c-à-d

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! \theta \in [0, \pi] \text{ t.q.}$
 $\cos x = \cos \theta$

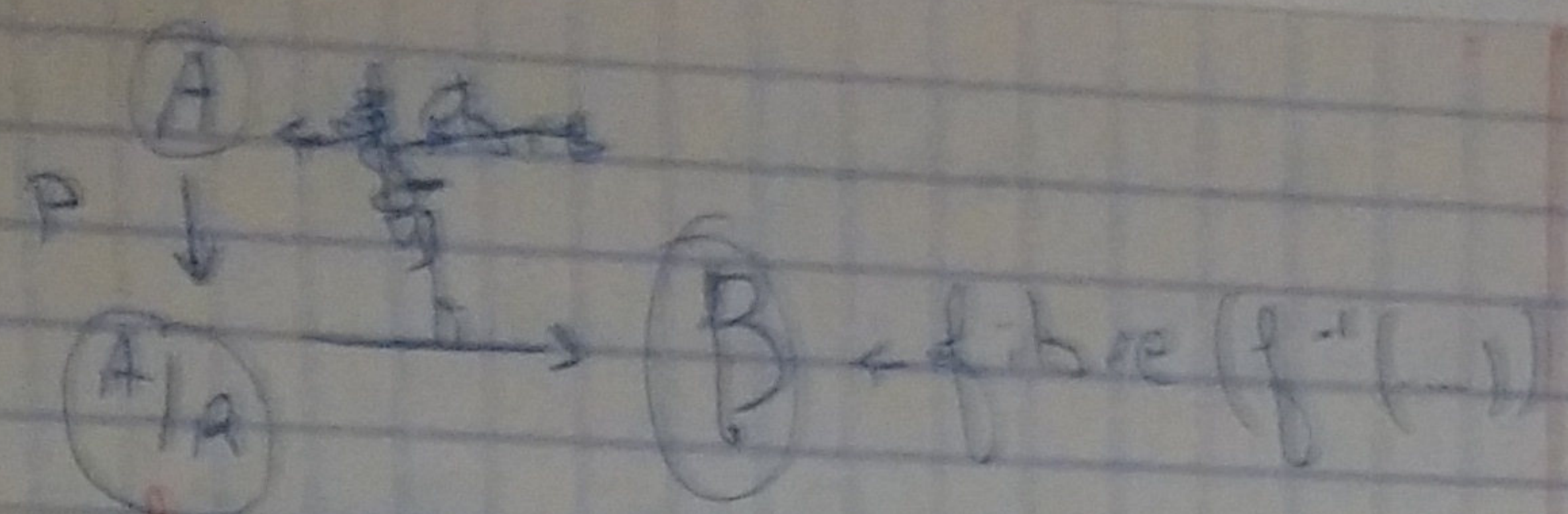
Ainsi: $\mathbb{R} = \bigcup_{\theta \in [0, \pi]} \theta$

+ Exercice 1:

Soit R une relation d'équivalence
 sur un ensemble A ,
 Soit B un autre ensemble,
 alors les deux propositions suivantes
 sont équivalentes: P.S.S.E

1. Il existe une bijection
 entre l'ensemble quotient
 A/R et B .

2. Il existe une surjection
 f de A vers B dont les
 fibres sont les classes
 d'équivalence modulo R .



rappel:

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$$

une partition

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) = y\}$$

$$x, x' \in A : x R x' \Leftrightarrow \exists y \in B.$$

$$x, x' \in f^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow \exists y \in B :$$

$$f(x) = y = f(x') = y \quad \forall x, x' \in f^{-1}(\{y\})$$

+ Exercice 5 :

- Soit la partition $(E_x)_{x \in [0,1]}$

définie par $E_x = \{x\}$ si $x \in]0,1[$ et $E_0 = E_1 = \{0,1\}$

Soit R la relation d'équivalence

que définit cette position.

Montrons que l'ensemble

quotient $[0,1] / R$ est en bijection

avec le cercle S' , où

$$S' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

+ rappel:

E un ensemble $(A_i)_{i \in I}$

une partition de E .

la relation R définie sur E par

$$x R y \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in A_i$$

est une relation d'équivalence

dont les classes d'équivalence

sont les A_i .

Il est clair que : $\forall x \in]0,1[$

$$\bar{x} = \{x\} = E_x \text{ et}$$

$$\bar{0} = \bar{1} = E_0 = E_1 = \{0,1\}$$

Pour tout $z \in S'$, $\exists \theta \in [0, 2\pi[$

$$\text{tel que } z = e^{i\theta}$$

$$\text{pour } \theta \in \{0, 2\pi\} \quad z = e^{i\theta} = 1$$

Ainsi : $\forall z \in S' - \{1\}$, $\exists ! \theta \in]0, 2\pi[$

$$\text{tel que } z = e^{i\theta}$$

$$\text{comme } 0 < \theta < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2\pi} < 1$$

alors la correspondance

$$f : [0,1] \rightarrow S' \quad \begin{matrix} x \mapsto e^{i2\pi x} \end{matrix}$$

est une application.

$$\text{On a } f(0) = f(1) = 1$$

Soit $z \in S' - \{1\}$, $\exists ! \theta \in]0, 2\pi[$

$$\text{t.q. } z = e^{i\theta} = e^{i2\pi \frac{\theta}{2\pi}} = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

Donc f est surjective.

$$\text{Ainsi, } f([0,1]) = S' = \{f(x) \mid x \in [0,1]\}$$

$$= \{e^{i2\pi x} \mid x \in [0,1]\}$$

+ Définir les fibres:

$$\bullet \text{ Pour } x = 0, f^{-1}(\{f(0)\})$$

$$= f^{-1}(\{1\}) = \{0,1\} = E_0 = E_1$$

De même, pour $x = 1$, $f(0) = f(1) = 1$

$$\text{Donc } f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(\{1\}) = \{0,1\}$$

$$= E_0 = E_1$$

$$\forall x \in]0,1[\quad f^{-1}(\{f(x)\})$$

$$= f^{-1}(\{e^{i2\pi x}\}) = \{x\}$$

On vient de montrer que les fibres de f sont la partition $(E_x)_{x \in [0,1]}$

Alors d'après l'exercice 4
 \exists une bijection de $[0,1]/R$ vers S' .
 $(\exists 0,1[\rightarrow]0,2[$
 $x \mapsto 2x = 0)$

+ Exercice 6 :

Soit A une partie de E

$$f: P(E) \rightarrow P(E)$$

$$x \mapsto A \cap x$$

$$g: P(E) \rightarrow P(E)$$

$$x \mapsto A \cup x$$

a. Déterminer les fibres $f^{-1}(\{y\})$ et $g^{-1}(\{y\})$
 $\forall y$ dans $P(E)$

Soit $y \in P(E)$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in P(E) / f(x) = y\}$$

$$= \{x \in P(E) / A \cap x = y\}$$

- l'équation $A \cap x = y$

a une solution $\Leftrightarrow y \subseteq A$

+ si $y \not\subseteq A$, alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

+ si $y \subseteq A$

$$x \in f^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow A \cap x = y$$

$$\text{On a } x = (A \cap x) \cup (x - A)$$

$$= y \cup (x - A)$$

$$= y \cup z \text{ où } z \in P(E - A)$$

$\Leftarrow \forall z \in P(E - A)$, on a

$$A \cap (y \cup z) = (A \cap y) \cup (A \cap z)$$

$$= y \cup \emptyset = y$$

$$= f(y \cup z)$$

Conclusion:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{y \cup z / z \in P(E - A)\}$$

- Soit $y \in P(E)$

$$\exists x \in P(E) \text{ t.p. } A \cup x = y \Leftrightarrow A \subseteq y$$

+ si $A \not\subseteq y$, $g^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

+ Soit $y \subseteq E$ t.p. $A \subseteq y$

Soit $x \subseteq E$ t.p. $A \cup x = y$, on a

$$x = (A \cap x) \cup (x - A)$$

Comme $A \cup x = y$, alors $x - A = y - A$

$$\text{C'est-à-dire } x = (y - A) \cup (A \cap x)$$

$$= (y - A) \cup z$$

$$\text{où } z = A \cap x \in P(A)$$

$\Leftarrow \forall z \in P(A)$, on a

$$A \cup ((y - A) \cup z) = y \cup z = y$$

Conclusion:

$$g^{-1}(\{y\}) = \{(y - A) \cup z / z \in P(A)\}$$

- Calculer $f(P(E))$ et $g(P(E))$

$$f(P(E)) = \{f(x) / x \in P(E)\}$$

$$= \{A \cap x / x \in P(E)\}$$

$$= P(A)$$

$$g(P(E)) = \{A \cup X \mid X \in P(E)\} \\ = \{A \cup Z \mid Z \in P(E-A)\} \quad P(E)/R \sim P(A) \text{ et } P(E)/S \sim P(E-A)$$

- calculer les relations d'équivalences R et S.

$$\forall x, x' \in P(E)$$

$$x R x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

$$\Leftrightarrow A \cap x = A \cap x'$$

$$x S x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

$$\Leftrightarrow A \cup x' = A \cup x$$

- calculer des ensembles

quotients $P(E)/R$ et $P(E)/S$

soit $x \in P(E)$, alors

$$\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

$$= f^{-1}(\{A \cap x\})$$

$$= \{(A \cap x) \cup Z \mid Z \in P(E-A)\}$$

+ rappel:

$$f: E \rightarrow F \text{ application}$$

$$R_f: x \in E$$

$$y \in \bar{x} \Leftrightarrow x R_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Leftrightarrow y \in f^{-1}(\{f(x)\})$$

$$\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

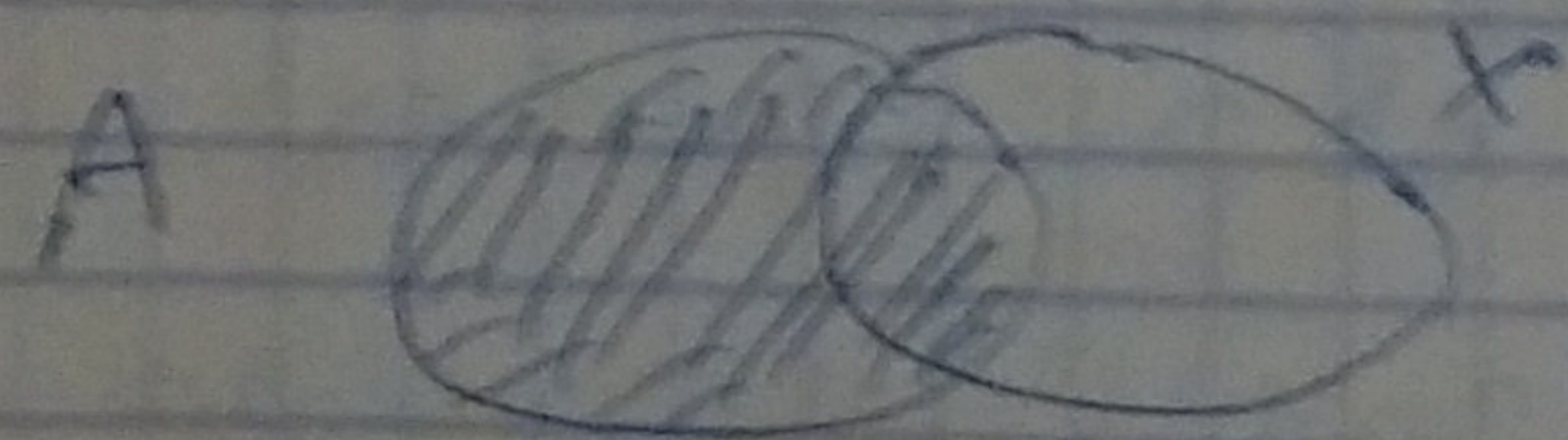
$$\bar{x} = g^{-1}(\{g(x)\})$$

$$= g^{-1}(\{A \cup x\})$$

$$= \{(A \cup x) \cup Z \mid Z \in P(A)\}$$

$$\bar{x} = \{((A \cup x) - A) \cup Z \mid Z \in P(A)\}$$

$$= \{(x - A) \cup Z \mid Z \in P(A)\}$$



b. m.p. les bijections

$$\begin{array}{ccc} f: E & \xrightarrow{f} & F \text{ application} \\ \downarrow p & \uparrow i & \\ E/R & \xrightarrow{f} & f(E) \text{ } f \text{ injectif} \\ \bar{x} & \xrightarrow{\quad} & f(x) \end{array}$$

- d'après le théorème c'est la

D.C.A. on sait que

$$f: P(E)/R \rightarrow \{f(E) = P(A)\} \\ \bar{x} \rightarrow f(x)$$

est une bijection, c'est

la bijection canonique

associée à f.

- d'après le théorème c'est la

décomposition canonique

associée (D.C.A.) on sait

que $P(E)/S \sim g(P(E))$

$$\text{soit } \psi: g(P(E)) \rightarrow P(E-A)$$

$$A \cup Z \rightarrow Z$$

$$\forall Z, Z' \in P(E-A)$$

$$A \cup Z = A \cup Z' \Leftrightarrow Z = Z'$$

Donc ψ est une application

inj et puisqu'il est surj par

construction alors bijectif \Rightarrow

$P(E)/R$ est en bijection avec

$P(E-A)$.

④ Exercice 7 :

sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{ (0, 0, \dots, 0) \}$

soit R la relation d'équivalence

définie par :

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) R (b_1, \dots, b_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p.}$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = \lambda (b_1, \dots, b_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C}^*, \forall 1 \leq i \leq n+1,$$

$$a_i = \lambda b_i)$$

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{ (0, \dots, 0) \} / R$$

l'ensemble quotient de R .

a. Soit l'application :

$$\Psi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \overline{(a_1, \dots, a_n, 1)}$$

soient (a_1, \dots, a_n) et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\Psi(a_1, \dots, a_n) = \Psi(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$$

$$\overline{(a_1, \dots, a_n, 1)} = \overline{(b_1, \dots, b_n, 1)}$$

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n, 1) R (b_1, \dots, b_n, 1) \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p. } (a_1, \dots, a_n, 1) = \lambda (b_1, \dots, b_n, 1)$$

On en déduit que $\lambda = 1$

$$(\text{car } 1 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 1)$$

$$\text{d'où } (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

Donc Ψ est injective.

$$\text{Soit } (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \Psi(\mathbb{C}^n)$$

$$\text{alors } \exists (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \text{ t.p.}$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = \Psi(b_1, \dots, b_n)$$

$$= \overline{(b_1, \dots, b_n, 1)}$$

$$\text{d'où } \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p.}$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = \lambda (b_1, \dots, b_n, 1)$$

par suite $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p.}$

$$a_{n+1} = \lambda \text{ d'où } a_{n+1} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\text{avec } a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{comme } (a_1, \dots, a_{n+1}) R \frac{1}{a_{n+1}} (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_{n+1} \left(\frac{a_1}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{n+1}}, 1 \right)$$

$$\text{alors } (a_1, \dots, a_{n+1}) R \left(\frac{a_1}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{n+1}}, 1 \right)$$

$$\text{d'où } (a_1, \dots, a_{n+1}) = \left(\frac{a_1}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{n+1}}, 1 \right)$$

$$= \Psi \left(\left(\frac{a_1}{a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \right) \in \Psi(\mathbb{C}^n)$$

$$\text{Ainsi } (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \Psi(\mathbb{C}^n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}^n - \Psi(\mathbb{C}^n) = \left\{ \overline{(a_1, \dots, a_n, 0)} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ s.o.} \right\}$$

$$\text{Soit } \Phi: \mathbb{P}^n - \Psi(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

$$\overline{(a_1, \dots, a_n, 0)} \longmapsto \overline{(a_1, \dots, a_n)}$$

$$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n - \{ (0, \dots, 0) \}$$

$$\overline{(a_1, \dots, a_n, 0)} = \overline{(b_1, \dots, b_n, 0)}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p.}$$

$$(a_1, \dots, a_n, 0) = \lambda (b_1, \dots, b_n, 0)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.p.}$$

$$(a_1, \dots, a_n) = \lambda (b_1, \dots, b_n)$$

$$\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\overline{(a_1, \dots, a_n, 0)}) = \Phi(\overline{(b_1, \dots, b_n, 0)})$$

Donc Φ est une application injective, et puis quit est surjective par construction

$\Rightarrow \phi$ est bijective.

$$B = S^{2n+1} = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid$$

$$\|(a_1, \dots, a_{n+1})\| = 1\}$$

$$S' = \{g \in \mathbb{C} \mid |g| = 1\}$$

$$g: S' \times S^{2n+1}$$

$$(g, (a_1, \dots, a_{n+1})) \mapsto (ga_1, \dots, ga_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* :$$

$$(\lambda g, (a_1, \dots, a_{n+1})) \mapsto (\lambda ga_1, \dots, \lambda ga_{n+1}) \Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) = \lambda (a_1, \dots, a_{n+1})$$

La relation T associée à cette

application définie par :

$$\forall (a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1}) \in S^{2n+1} \text{ (car } \|(a_1, \dots, a_{n+1})\| = \|(b_1, \dots, b_{n+1})\| = 1)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) T (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists g \in S' \mid \phi(a_1, \dots, a_{n+1}) = g \cdot (b_1, \dots, b_{n+1}) \Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}^T$$

$$\overline{(b_1, \dots, b_{n+1})}^T = \{g(b_1, \dots, b_{n+1}) \mid g \in S'\}$$

$$= \{0\}$$

$$\phi: S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \longmapsto \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}$$

$$\text{Soit } (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$$

$$\text{et soit } \lambda = \|(a_1, \dots, a_{n+1})\|$$

$$\text{alors } \lambda > 0$$

si on pose

$$(b_1, \dots, b_{n+1}) = \frac{1}{\lambda} (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$\|(b_1, \dots, b_{n+1})\| = 1 \text{ et}$$

$$\overline{(b_1, \dots, b_{n+1})} = \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}$$

$$= \phi(b_1, \dots, b_{n+1})$$

Donc ϕ est surjective

$$\text{Soit } (a_1, \dots, a_{n+1}) \in S^{2n+1}$$

$$(b_1, \dots, b_{n+1}) \in \phi^{-1}(\{\phi(a_1, \dots, a_{n+1})\})$$

$$\Leftrightarrow \phi(b_1, \dots, b_{n+1}) = \phi(a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \overline{(b_1, \dots, b_{n+1})} = \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) R (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$(b_1, \dots, b_{n+1}) = \lambda (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in S'$$

$$(b_1, \dots, b_{n+1}) = \lambda (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$(car \|(b_1, \dots, b_{n+1})\| = \|(a_1, \dots, a_{n+1})\| = 1)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) T (a_1, \dots, a_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \overline{(a_1, \dots, a_{n+1})}^T$$

Donc les fibres de ϕ sont les classes d'équivalence modulo

$$T. \text{ Ainsi } S^{2n+1} / \sim_T \simeq \mathbb{P}^n$$

Série 2

+ Exercice 1 -

Soit G un Groupe, H un sous-groupe de G .

R_g et R_d les relations à gauche et à droite modulo H définies par :

$$\forall x, y \in G.$$

$$x R_g y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

$$x R_d y \text{ modulo } H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

On vérifie que R_g et R_d sont des relations d'équivalence

de $x \in G$ modulo R_g est

$$xH = \{xh / h \in H\}$$

et la classe d'équivalence de x modulo R_d .

$$Hx = \{hx / h \in H\}$$

On dit que le sous groupe H est distingué (normal ou invariant) dans G , et note

$$H \triangleleft G, \text{ si } \forall x \in G$$

$$xHx^{-1} \subset H, \text{ c-à-d si } :$$

$$\forall x \in G, \forall h \in H \quad xhx^{-1} \in H$$

a - m φ H est distingué dans

$G \Leftrightarrow H$ est le noyau d'un

morphisme de groupe

de départ est G .

\Rightarrow) si $H \triangleleft G$, on sait qu'on définit sur l'ensemble

quotient G/H une structure de groupe.

Si on considère la surjection canonique

$$\pi: G \longrightarrow G/H$$

$$x \longmapsto \pi(x) = xH = Hx$$

$$\text{On a } \forall x, y \in G$$

$$\pi(xy) = xyH = xHyH = \pi(x) \cdot \pi(y)$$

Donc π est un homomorphisme de groupe surjectif.

$$x \in \ker \pi \Leftrightarrow \pi(x) = H = xH$$

$$e R_g x \text{ modulo } H \Leftrightarrow x \in H$$

$$\text{Donc } H = \ker \pi.$$

$$\Leftarrow) \text{ soit } f: G \longrightarrow G_2$$

un homomorphisme de Groupe on note e_i l'élément neutre de G_i , $i=1,2$

$$\text{posons } H = \ker f,$$

H est un sous-groupe de G_1 :

$$\forall x \in G_1, \forall x \in \ker f, \text{ on a}$$

$$f(xhx^{-1}) = f(x) \cdot f(h) \cdot f(x^{-1})$$

$$= f(x) e_2 f(x^{-1})$$

$$= f(x) \cdot f(x^{-1})$$

$$= f(xx^{-1}) = f(e_1) = e_2$$

$$\text{Donc } \forall x \in G_1, \forall h \in \ker f$$

$$x h x^{-1} \in \ker f$$

Ainsi $\ker f \triangleleft G$,

b. montrez que:

- i. H est normal dans G .
- ii. $R_g = R_d$
- iii. R_g est compatible avec la loi \circ de G
- iv. R_d est compatible avec la loi \cdot de G .

sont équivalentes:

$$i \Rightarrow ii)$$

Soit $x \in G, \forall h \in H, \exists h' \in H$

$$\text{t.q. } x h x^{-1} = h' \Rightarrow$$

$$\forall h \in H, \exists h' \in H : x h = h' x \Rightarrow$$

$$x H \subset H x$$

De même ; $\forall h \in H, \exists h' \in H :$

$$x^{-1} h x = h'$$

$$(x H x^{-1} \subset H \text{ et } x^{-1} H x \subset H)$$

$$\Rightarrow \forall h \in H, \exists h' \in H :$$

$$h x = x h' \Rightarrow H x = x H$$

Donc $\forall x \in G, x H = H x$

$$\text{D'où } R_g = R_d$$

$$ii \Rightarrow iii)$$

on appelle que R_g est compatible avec la loi \cdot de G \iff

$$\forall x, x', y, y' \in G :$$

$$(x R_g y \text{ et } x' R_g y') \Rightarrow x x' R_g y y'$$

Soient $x, y, y' \in G$ t.q.

$$x R_g y \text{ et } x' R_g y' \iff \text{il existe } h \in H$$

$$x^{-1} y \text{ et } (x')^{-1} y' \in H$$

$$(x x')^{-1} y y' = (x')^{-1} x^{-1} y y' = (x')^{-1} h y'$$

$$\text{où } h = x^{-1} y \in H, \text{ comme}$$

$$H y' = y' H, \exists h' \in H$$

$$x^{-1} y y' = h y' = y' h', \text{ d'où}$$

$$(x x')^{-1} y y' = (x')^{-1} y' h' \in H$$

$$\text{car } (x')^{-1} y' \in H$$

$$\text{Donc } x x' R_g y y'$$

$$iii \Rightarrow i)$$

$\forall x \in G, \forall h \in H$, on a :

$$h^{-1} \in H \text{ d'où } \forall h \in H$$

$h^{-1} R_g$ modulo H (l'élément neutre de G), d'où

$$\forall h \in H (h^{-1} R_g \text{ modulo } H \text{ et } x^{-1} R_g x^{-1} \text{ modulo } H)$$

$$\text{Donc}$$

$$\forall h \in H : h^{-1} x^{-1} R_g x^{-1} \text{ modulo } H$$

$$\iff (h^{-1} x^{-1})^{-1} x^{-1} = x h x^{-1} \in H$$

$$\text{Donc } H \triangleleft G$$

comme $i) \Rightarrow iii)$ et $iii) \Rightarrow ii)$

$$\text{alors } i) \Rightarrow iv)$$

$$\text{Reste à montrer } iv) \Rightarrow i)$$

$\forall h \in H, \forall x \in G$, on a :

$$h R_d \text{ et } x R_d x^{-1} \text{ modulo } H \Rightarrow$$

$$x h R_d x \text{ modulo } H \Rightarrow$$

$$x h x^{-1} \in H$$

Donc $H \triangleleft G$
 $c \cdot a \cdot d \in \varnothing \neq \emptyset$

Remarque 1.

- $x R_y y \text{ mod } H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$
 $\overline{x^{-1}} = xH = \{xh \mid h \in H\}$
- $x R_y y \text{ mod } H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$
 $\overline{x^{-1}} = Hx = \{hx \mid h \in H\}$
- R_y est compatible avec la loi de $G \Leftrightarrow \forall x, y, y' \in G$
 $(x R_y y \text{ et } x' R_y y') \Rightarrow xx' R_y yy'$

Remarque 2.

Soit G un Groupe et H un s-groupe distingué dans G .
 On sait que les deux relations de congruence modulo H sont égaux, c-à-d $R_y = R_d$

Posons $G/H = (G/H)_d = (G/H)_y$

Soit la correspondance

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H$$

$$(xH, x'H) \rightarrow xx'H$$

cette correspondance est

une application $\Leftrightarrow \forall x, x', y, y' \in G$
 $(xH, x'H) = (yH, y'H) \Rightarrow$
 $xx'H = yy'H$

c-à-d $\forall x, x', y, y' \in G$
 $(x R_y y) \text{ et } (x' R_y y') \Rightarrow xx' R_y yy'$
 Donc R_y est compatible avec la loi de G .

on vient de définir une

loi de décomposition interne sur G/H
 Comme suit : $\forall x, x' \in G$:

$$xH \cdot x'H = xx'H$$

Il est facile de voir que cette loi est associative dont l'élément neutre est $eH = H$
 Le symétrique de xH est $x^{-1}H$
 muni de cette loi, G/H est un Groupe

+ Exercice 2.

Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G .

mq H est distingué dans G .

$$\Rightarrow \text{mq } \forall x \in G, xH = Hx$$

• $\forall x \in H$, on a $x^{-1} \in H$, donc
 $xH = H$ $x = xe^{-1} \in H$

et $x^{-1} = x^{-1}e \in H$.

c-à-d $x R_y e \text{ mod } H$ et $x R_y e \text{ mod } H$
 Donc $\forall x \in H : Hx = He = H = eH = xH$

• $\forall x \in G - H$ on a :

$$xH \cap H = \emptyset = H \cap Hx$$

comme l'indice de H dans G est 2, il n'y a que deux classes à gauche (resp à droite)

disjointes l'une de l'autre, c-à-d

$$|(G/H)_y| = |(G/H)_d| = 2$$

Ainsi : $\forall x \in G - H :$

$$G = H \cup xH = H \cup Hx$$

Ainsi : $xH = Hx$

Donc H est distingué dans G .

$$\Rightarrow H \triangleleft G$$

+ Exercice 3.

Soit $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupe et $x \in G$.

a. on rappelle que l'ordre de x est le plus petit entier

$n \geq 1$, tq $x^n = e$, e étant l'élément neutre de G .

On m.q. $n \geq 1$ est l'ordre de x

(on note $n = \text{ord}(x)$) \Leftrightarrow

$$\begin{cases} 1. x^n = e \\ 2. \forall m \in \mathbb{Z} : x^m = e \Rightarrow n \mid m \end{cases}$$

Supposons que $n = \text{ord}(x) \in \mathbb{N}^*$ est fini, posons e l'élément neutre de H , alors

$$x^n = e \Rightarrow f(x^n) = (f(x))^n = f(e) = e,$$

Donc $f(x)$ est d'ordre fini.

et $\text{ord}(f(x)) \mid n = \text{ord}(x)$.

b. On a f est un monomorphisme

(f homomorphisme injectif)

$$\text{alors } (f(x))^{\text{ord}(x)} = f(x^{\text{ord}(x)})$$

$$= f(e)$$

$$\Rightarrow x^{\text{ord}(x)} = e$$

$$\Rightarrow n = \text{ord}(x) \mid \text{ord}(f(x))$$

Puisque f est injective

alors $\text{ord}(f(x)) = \text{ord}(x)$.

c. l'exposant d'un groupe G s'il existe est le plus petit entier naturel non nul n tq

$$\forall x \in G, \text{ord}(x) = n.$$

Si cet exposant n'existe pas

on dit que G est d'exposant infini.

Soit G un groupe fini d'ordre

$$m \geq 1.$$

Comme $\forall x \in G, x^m = x^0 = e$,

alors $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \forall x \in G, x^k = e\}$

est une partie non vide de \mathbb{N}

car $m \in E$. Si on pose $n = \min(E)$

alors n est l'exposant de G .

d. Posons $m = |G|$, H un s.-groupe

de G , $n = \exp(G)$, $r = \exp(H)$

d'après le théorème de la

division euclidienne,

$$\exists q, r \in \mathbb{N} : n = rq + r, 0 \leq r < n.$$

On sait que $\forall x \in H$, on a :

$$x^n = x^r = e.$$

$$\text{C'où } \forall x \in H : x^n = (x^r)^q \cdot x^r$$

$$\Rightarrow x^n = (e)^q \cdot x^r = x^r = e.$$

Donc $r = 0$ à cause la

définition de r (car r est

le plus petit entier non nul)

Ainsi $\exp(H) \mid \exp(G)$

• Soit H un sous-groupe distingué f - calculer l'exposant π/π dans G .

soit $x \in G$: $\text{ord}(x) \mid n = \exp(G)$

$$\Leftrightarrow x^n = e \Rightarrow x^n H = (xH)^n = H$$

$$\Rightarrow \text{ord}(xH) \mid n$$

(l'exposant divise)

$$\Rightarrow \exp(G/H) \mid n = \exp(G)$$

Même démonstration que précédemment.

On remplace (x) par (xH)

Dans la division Euclidienne. est un groupe cyclique d'ordre n .

$$\text{Donc } \exp(\pi/\pi) = \infty$$

• pour $n=0$; $\pi/\pi = \pi/\pi$
 $= \{m \mid m \in \pi\} \Rightarrow \pi$

• pour $n=1$; $\pi/\pi = \pi/\pi$
 $\Rightarrow \pi/\pi = \{\pi\}$

• pour $n \geq 2$; $\pi/\pi = \{0, 1, \dots, n-1\}$
 $= \langle \bar{1} \rangle$

$$\Rightarrow \text{ord}(\bar{1}) = n \text{ car } \pi/\pi$$

$$\text{D'où } \exp(\pi/\pi) = n.$$

- calculer l'exposant \mathbb{Z}_3 .

$$\mathbb{Z}_n : \begin{matrix} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & \rightarrow & 3 \end{matrix} \quad \text{ord}(\mathbb{Z}_n) = 2$$

$$C : \begin{matrix} 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 1 \end{matrix} \quad \text{ord}(C) = 3$$

$$\text{ord}(\mathbb{Z}_3) = 3! = 6$$

$$\Rightarrow \exp(\mathbb{Z}_3) \mid 6$$

$$2 \mid \exp(\mathbb{Z}_3), \quad 3 \mid \exp(\mathbb{Z}_3)$$

$$\Rightarrow 6 = 2 \times 3 \mid \exp(\mathbb{Z}_3)$$

$$\Rightarrow \exp(\mathbb{Z}_3) = 6.$$

e - Un exemple de groupe dont l'exposant est infini.

$(\mathbb{Z}, +)$, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ (\mathbb{Z} est engendré par 1)

$$\forall n \geq 1, n \cdot 1 = n \neq 0 \Rightarrow \text{ord}(1) = \infty$$

Ainsi $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe d'exposant infini.

- autre exemple :

- autre exemple :

$$U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$$

(U, \cdot) est un groupe.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier

$z_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ est une racine

primitive p ième de l'unité,

$$\text{c-à-d } \text{ord}(z_p) = p$$

Donc l'exposant de U doit être divisible par tout les

nombre premiers $p \in \mathbb{N}$

$$\text{D'où } \exp(U) = +\infty$$

⊕ Exercice 4 =

Soit G un groupe,
 si tout élément de $G - \{e\}$
 est d'ordre 2, alors G
 est abélien.

En d'autres termes, $\forall x \in G - \{e\}$
 $x^2 = e$, donc $\forall x \in G: x^2 = e$

Soient $x, y \in G$: on a

$$(xy)^2 = e = x.y.x.y \Rightarrow$$

$$x = x^2.y.x.y = y.x.y \Rightarrow$$

$$xy = y.x.y^2 = y.x$$

Ainsi, G est abélien.

⊕ Exercice 5 : (Théorème de Cauchy):

• Soit G un groupe abélien fini
 d'ordre $n \neq 0$, et soit p un nombre
 premier divisant n , alors il
 existe un élément de G d'ordre p .

Pour $n=2$, $G = \{e, x\}$, $O(x) = 2$

Pour $n=3$, G est cyclique, il
 existe donc $x \in G$: $O(x) = 3$

puisque $G = \{e, x, x^2\} = \langle x \rangle$

Pour $n=4$, si G est cyclique
 il existe $x \in G$, $G = \langle x \rangle = \{e, x, x^2, x^3\}$

Donc $O(x) = 4$.

$$(x^2)^2 = e \Rightarrow O(x^2) = 2$$

si G n'est pas cyclique
 alors $\forall x \in G - \{e\}$, $O(x) = 2$

d'où G est abélien. d'après Ex 4
 les seuls groupes d'ordre 4
 (à isomorphisme près) sont $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
 et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Pour $n=5$, G est cyclique

Donc $\exists x \in G$: $O(x) = 5$ et $G = \langle x \rangle$

Hypothèse de récurrence forte
 (complète)

$\forall k$: $2 \leq k \leq n-1$, tout groupe abélien
 d'ordre k vérifie le théorème
 de Cauchy

Soit G un groupe commutatif d'ordre
 n et soit p un nombre premier
 divisant n .

Soit $x \in G - \{e\}$, donc $O(x) \neq 0$

1^{er} cas: $p \mid O(x)$

$$\text{alors } x^{O(x)} = e = (x^{\frac{O(x)}{p}})^p = z^p$$

$$\text{où } z = x^{\frac{O(x)}{p}}$$

Il est clair que $z \neq e$

$$\text{car } 1 \leq \frac{O(x)}{p} \leq O(x)$$

comme $z^p = e$, alors $O(z) = p$

car p est un nombre premier.

Ainsi, $z = x^{\frac{O(x)}{p}}$ est un élément
 de G d'ordre p .

2^{ème} cas: $p \nmid O(x)$ (p ne
 divise pas l'ordre de x)

Posons $H = \langle x \rangle$, $|H| = O(x) \neq 0$

comme G est abélien, H est
 distingué dans G .

et G/H est un groupe abélien on pose $H = \langle x \rangle$;

D'autre part :

$$(H, R, f \quad \forall k \quad 2 \leq k \leq n-1)$$

$$p \mid |G| = n = |H| [G:H] \\ = |H| \cdot |G/H|$$

Comme $p \nmid |H|$, alors

p et $|H|$ sont premiers entre eux, d'après le théorème

de Gauss, $p \mid |G/H|$

Comme, $2 \leq |G/H| \leq n-1 < n$

d'après l'hypothèse de récurrence forte appliquée

au groupe G/H .

$$\exists y \in G \text{ t.p. } o(yH) = p$$

cela signifie que $y \notin H$

$$\text{et } y^p \in H$$

$$\text{Soit } p: G \rightarrow G/H$$

$$x \mapsto xH$$

la surjection canonique,

comme ν est un homomorphisme

de groupe, alors $o(\nu(y)) = o(yH) = p$

divise l'ordre de y $o(y)$

(voir EX3-a)

Dans ce cas $y^{\frac{o(y)}{p}}$ est un élément de G d'ordre p .

Si $|G| \neq n$, G est abélien

et p un nombre premier

divisent n , alors

$$\forall x \in G, o(x) = p$$

H est un sous-groupe cyclique

d'ordre p dans G , donc H est d'indice $\frac{n}{p}$ dans G .

⊕ Exercice 6 =

$$S_3 = \{ \text{id}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, c, d \}$$

une bijection

$$\text{id}: \begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{matrix}, \tau_{12}: \begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{matrix}$$

$$\tau_{13}: \begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \end{matrix}, \tau_{23}: \begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$c: \begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{matrix}, d: \begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$S_3 = \{ \text{id}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, c, d \}$$

X	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	c	d
id	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	c	d
τ_{12}	τ_{12}	id	d	c	τ_{23}	τ_{13}
τ_{13}	τ_{13}	c	id	d	τ_{12}	τ_{23}
τ_{23}	τ_{23}	d	c	id	τ_{13}	τ_{12}
c	c	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	d
d	d	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	c

$$\text{comme : } \tau_{12} \tau_{13} = d \neq c = \tau_{13} \tau_{12}$$

$\Rightarrow S_3$ est un groupe non abélien.

+ Exercice 7.

Soit G un groupe d'ordre 6.

a. Si G est abélien.

d'après le Théorème de Cauchy, il existe $x \in G$

t.q. $O(x) = 2$, $\exists y \in G$ t.q. $O(y) = 3$.

$$\text{On a } (xy)^2 = y^2 + e$$

$$(xy)^3 = x^3 = x \neq e$$

$$(xy)^6 = e \text{ donc } O(xy) = 6$$

d'où $G = \langle xy \rangle$ donc

G est cyclique.

b. Soit G un groupe d'ordre 6 non abélien.

si $\forall x \in G - \{e\}$, x est

d'ordre 2, alors (si G est

sera abélien (ex 4))

Donc $\exists b \in G$ t.q. $O(b) = 3$

posons $H = \langle b \rangle = \{e, b, b^2\}$

$\left(\frac{\text{card}(G)}{\text{card}(H)}\right)$ H est d'indice 2

dans G , donc H est

distingué dans G .

\exists donc $a \in G - H$ t.q.

$G/H = \{H, aH\}$ d'où

$G = H \cup aH = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$

si $O(a) = 3$, comme

$|G/H| = 2$, alors $(aH)^2 = H = a^2H$ et

d'où $a^3 \in H$

par suite $a^3 \in H$, d'où

$$a^{-3} \cdot a^3 = a^{-3} = a \in H$$

absurde, car $a \notin H$

Donc $O(a) = 2$ et comme $aH = H \cdot a$

alors : comme G n'est pas

abélien on a $ab \neq ba$ et

$$ab^2 \neq b^2ab = b^4a = ba$$

Donc $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = e, ab = b^2a \rangle$

D'après l'exercice 6, on sait que

$$S_3 = \langle \sigma_{12}, c \mid c = (123), \sigma_{12}c = c^2\sigma_{12} \rangle$$

$$\text{car } (\sigma_{12}c = c\sigma_{12} = \sigma_{23})$$

Soit $f: G \rightarrow S_3$

f homomorphisme de groupe t.q.

$$f(a) = \sigma_{12} \text{ et } f(b) = c$$

on vérifie facilement que

c'est un isomorphisme de groupes

c. Il ya deux types de groupes d'ordre 6 (à isomorphisme près) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et S_3

+ Exercice 8.

Soient G et H deux groupes

dont la loi sont notées multiplicativement :

$$(a, a') \times (b, b') = (ab, a'b')$$

a. Il est clair que $(G \times H, \cdot)$

est un groupe d'élément

neutre (e_G, e_H)

$$\text{et } (a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$$

b. Existent

c. $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ est cyclique

et $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ est non cyclique, car il est d'ordre 4 et tout élément différent de $(5, 5)$ est d'ordre 2

d. si G et H sont cyclique et $|G|$ et $|H|$ sont premiers entre eux, alors $G \times H$ est cyclique

en effet: si $G = \langle x \rangle$ avec $O(x) = n$, $H = \langle y \rangle$

avec $O(y) = m$,

alors $G \times H$ est abélien,

car G et H le sont, De

plus (x, y) est d'ordre n.m

car $O(x, e_H) = O(x) = n$

$O(e_G, y) = O(y) = m$

et $(x, y) = (x, e_H) \cdot (e_G, y)$.

④ Exercices Complémentaires

+ EX. : Propriété universelle

du Quotient :

Soit G un groupe, $H \leq G$ et

$s: G \rightarrow G/H$ la surjection

canonique, soit $f: G \rightarrow G_1$

un homomorphisme de groupes,

e, e_1 les éléments neutres

respectifs de G et G_1

1. m.p les équivalences des

trois propriétés suivantes:

i. il existe une application

$\bar{f}: G/H \rightarrow G_1$

telle que $f = \bar{f} \circ s$.

ii. $H \subset \ker f$

iii. $f(H) = \{e_1\}$

2. Montrer que lorsque

ces conditions sont vérifiées,

l'application \bar{f} est uniquement

définie et que c'est un

morphisme de groupes,

vérifier que $\text{Im } \bar{f} = \text{Im } f$,

$\ker \bar{f} = \ker f / H$

et que $\bar{f}(s(x)) = f(x), \forall x \in G$

où $\bar{x} = s(x)$ désigne la

classe de x dans G .

⊕ Corrigé exercice 1:

1. $ii \Leftrightarrow iii$ évident

- $i \Rightarrow ii$, $\forall x \in G/H$, on a

$$xH = s(x) = H = s(e) ; \text{ d'où}$$

$$\forall x \in H, f \circ s(x) = \bar{f}(xH)$$

$$= f(x) = \bar{f}(H) = f \circ s(e) = f(e) = e.$$

d'où $\forall x \in H, x \in \ker f$,

c-à-d $H \subset \ker f$.

- $ii \Rightarrow i$ Soit la correspondance $\Leftrightarrow x \in \ker f$

$$\bar{f}: G/H \rightarrow G,$$

$$\bar{x} \mapsto f(x)$$

$$\forall x, y \in G \quad \bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow xH = yH$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}y \in \ker f$$

$$\Rightarrow f(x^{-1}y) = e, \Rightarrow$$

$$f(x)^{-1}f(y) = e,$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$$

Donc \bar{f} est bien une application et vérifier

$$f = \bar{f} \circ s$$

2. Si $g: G/H \rightarrow G$,

est une autre application

qui vérifie $g \circ s = f$

Alors, $\forall x \in G$:

$$g \circ s(x) = g(\bar{x}) = f(x) = \bar{f} \circ s(x) = \bar{f}(x)$$

$$\text{Donc } g = \bar{f}$$

$$\begin{aligned} - \forall x, y \in G, f(\bar{x}\bar{y}) &= \bar{f}(\bar{x}\bar{y}) = f(xy) \\ &= f(x)f(y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y) \end{aligned}$$

Donc \bar{f} est un homomorphisme de groupe.

$$\text{Im } \bar{f} = \{f(x) \mid x \in G\}$$

$$= \{f(x) \mid x \in G\}$$

$$= \text{Im } f$$

$$- \bar{x} \in \ker \bar{f} \Leftrightarrow \bar{f}(\bar{x}) = f(x) = e,$$

Donc:

$$\ker \bar{f} = \{\bar{x} \mid x \in \ker f\} = \ker f / H$$

D'après $ii \Rightarrow i$, on sait que \bar{f} doit être définie par:

$$\forall x \in G, \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$$

$$\text{ou } \bar{x} = xH$$

+ Exercice 8:

Soit G un groupe.

$$G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle.$$

G' s'appelle le groupe (ou sous-groupe) commutateurs ou sous-groupe dérivé de G , noté

$$\text{aussi } D(G) \text{ ou } [G: G]$$

1. montrer que pour tout endomorphisme de G , on a

$$f(G') \subset G'. \text{ En déduire}$$

que G' est distingué dans G

2. Soit H distingué dans G . Comme G' est en particulier stable par les automorphismes intérieurs,
 $\Leftrightarrow G' \subset H$

3. En déduire que pour tout homomorphisme de groupe $f: G \rightarrow G_1$, avec G_1 abélien, il existe un unique homomorphisme

$\bar{f}: G/G' \rightarrow G_1$ tel que $\bar{f} = f \circ \pi$, où $\pi: G \rightarrow G/G'$ est l'homomorphisme canonique

⊕ Corrigé de l'exercice 2

1. si on pose $S = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$

alors $G' = \langle S \rangle$, de plus $(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} \in S$
 comme tout élément de G' est un produit fini d'éléments de S
 Alors on a $f(G') \subset G'$ revient à ce que $f(S) \subset G'$

$\forall a, b \in G$, on a

$$f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1}$$

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \in G' \text{ résultat à cause de l'exercice 1.}$$

Donc $f(G') \subset G'$

à cause de

$$f(\prod [a_i, b_i]) = \prod f([a_i, b_i])$$

$$\begin{aligned} \text{O}_x: G &\rightarrow G \\ a &\mapsto xax^{-1} \end{aligned}$$

alors $\forall x \in G$.

$$\text{O}_x(G') = xG'x^{-1} \subset G'$$

Donc $G' \triangleleft G$

2. G/H abélien \Leftrightarrow

$$\forall a, b \in G, Hab = Hba$$

$$\Leftrightarrow \forall a, b \in G, ab(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow S' \subset H \Leftrightarrow G' \subset H$$

3. Soit $f: G \rightarrow G_1$ un morphisme de groupes avec G_1 abélien.

d'après le 1^{er} théorème (1), l'isomorphisme $G/\ker f \cong \text{Im } f$
 comme G_1 est abélien,

$G/\ker f$ est abélien, d'où

$G' \subset \ker f$, d'où le

résultat à cause de l'exercice 1.