



## **Examen de rattrapage**

le 10/04/2018 – Durée 1h 30mn – documents non autorisés

### **EXERCICE 1 : (6 pts)**

Soit  $V$  un alphabet fini. On désigne par  $\mathcal{P}(V^*)$  l'ensemble des parties de  $V^*$ .

On définit la fonction  $C : \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  comme suit :

pour tout langage  $L$  défini sur  $V$ , on a :  $C(L) = \{ w \in V^* / \exists u \in L \text{ tel que } w = u.u \}$ .

1) Soit  $L = \{ (ab)^n / n \geq 0 \}$  et  $L_1 = C(L)$ .

1-1) Caractériser  $L_1$  (i.e donner la propriété vérifiée par les mots de  $L_1$ ). (1 pt)

1-2) À l'aide du théorème de Nerode, montrer que  $L_1$  est régulier. (1 pt)

2) Soit  $L = \{ a^n.b^n / n \geq 0 \}$  et  $L_2 = C(L)$ .

2-1) Caractériser  $L_2$ . (1 pt)

2-2) À l'aide du théorème de Nerode, montrer que  $L_2$  n'est pas régulier. (1 pt)

3) Déterminer  $L_1.L_2$  et  $L_1 \cap L_2$ . (1 pt)

4) Soit  $L$  un langage quelconque. Quelle relation y a-t-il entre  $C(L)$  et  $L.L$  ? (1 pt)

### **EXERCICE 2 : (8 pts)**

I) Trouver :

I-1) une grammaire de type 3 pour  $L_1 = \text{langage des mots de } \{a, b, c\}^*$  ; où dans chaque mot de  $L_1$ , chaque lettre de rang pair est un «a» (les lettres sont numérotées à partir du n° 1) ; (1,5 pts)

I-2) une grammaire de type 2 pour  $L_2 = \{ b^n.a.b^n.a / n \geq 0 \}$  ; (1,5 pts)

I-3) une grammaire de type 1 pour  $L_3 = \{ u.u / u \in \{0, 1\}^* \}$  ; (1,5 pts)

I-4) une grammaire de type 0 pour  $L_4 = \{ a^n.b^m.c^{n \times m} / n, m \geq 0 \}$ . (1,5 pts)

II) Trouver un automate d'états finis simple pour le langage  $L_1$  de I-1) de cet exercice. (2 pts)

### **EXERCICE 3 : (6 pts)**

Soit  $A$  l'automate d'état fini simple défini par :  $\langle V, S, F, S_0, I \rangle$  ; où :

$V = \{a, b, c\}$ ,  $S = \{ S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \}$ ,  $F = \{ S_4, S_5 \}$  et  $I = \{(a, S_0, S_1), (a, S_0, S_2), (a, S_1, S_1), (b, S_1, S_3), (c, S_2, S_3), (a, S_3, S_3), (a, S_3, S_4), (c, S_3, S_5), (b, S_4, S_4)\}$ .

1) Dessiner le graphe représentant l'automate  $A$ . (1 pt)

2) Construire un automate d'états finis partiellement généralisé qui accepte  $(L(A))^R$ . (1 pt)

3) Construire un automate d'états finis partiellement généralisé qui accepte  $(L(A))^+$ . (1 pt)

4) Construire l'automate déterministe équivalent à  $A$ . Dessiner son graphe. (2 pts)

5) À partir de l'automate  $A$ , trouver l'expression régulière qui dénote  $L(A)$ . (1 pt)

**Bon courage !**

## **Bref corrigé :** (Rattrapage de ThL – L2 informatique – 2017/2018)

### Sol-EX.1 :

1)

1-1) Soit  $L = \{ (ab)^n / n \geq 0 \}$ .

$$L_1 = C(L) = \{ (ab)^{2n} / n \geq 0 \} = \{ \varepsilon, abab, abababab, (ab)^6, \dots, (ab)^{2n}, \dots \}.$$

1-2) Soit  $S_0 = C(L)$  ; calculons les dérivées de  $S_0$  :

$$S_0 \parallel a = \{ bab, bababab, b(ab)^5, \dots, b(ab)^{2n-1}, \dots \} = b \cdot \{ (ab)^{2n+1} / n \geq 0 \} = S_1$$

$$S_0 \parallel b = \emptyset$$

$$S_1 \parallel a = \emptyset$$

$$S_1 \parallel b = \{ (ab)^{2n+1} / n \geq 0 \} = S_2$$

$$S_2 \parallel a = \{ b, babab, b(ab)^4, \dots, b(ab)^{2n}, \dots \} = b \cdot \{ (ab)^{2n} / n \geq 0 \} = S_3$$

$$S_2 \parallel b = \emptyset$$

$$S_3 \parallel a = \emptyset$$

$$S_3 \parallel b = \{ (ab)^{2n} / n \geq 0 \} = S_0$$

Le langage  $\{ (ab)^{2n} / n \geq 0 \}$  a un nombre fini de dérivées ; par conséquent il est régulier.

2)

$$2-1) L = \{ a^n.b^n / n \geq 0 \}. L_2 = C(L) = \{ a^n.b^n.a^n.b^n / n \geq 0 \}.$$

2-2) On suppose que  $L_2$  est régulier, donc d'après le théorème de Nerode, le nombre de ses dérivées par rapport aux mots sur  $V = \{a, b\}$  est fini. Donc il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $p \neq q$  et  $L_2 \parallel a^p = L_2 \parallel a^q$ . De plus, on sait que :  $a^p.b^p.a^p.b^p \in L_2 \Rightarrow b^p.a^p.b^p \in L_2 \parallel a^p \Rightarrow b^p.a^p.b^p \in L_2 \parallel a^q \Rightarrow a^q.b^p.a^p.b^p \in L_2$  avec  $p \neq q \Rightarrow$  contradiction. D'où  $L_2$  n'est pas régulier.

$$3) L_1.L_2 = \{ (ab)^{2n}.a^m.b^m.a^m.b^m / n, m \geq 0 \}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{ \varepsilon, abab \}.$$

4) Soit  $L$  un langage quelconque.

On a :  $C(L) \subseteq L.L$ , car : pour tout  $u \in V^*$ ,  $u.u \in L.L$ .

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, en effet, on peut avoir  $L.L \not\subseteq C(L)$  ; par exemple, pour  $L = \{ \varepsilon, a, b \}$  on a  $L.L = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb \}$  mais  $C(L) = \{ \varepsilon, aa, bb \}$ .

### Sol-EX.2 :

I)

I-1) Une grammaire de type 3 pour  $L_1$  :  $G_1 = (\{a, b, c\}, \{S, A\}, S, P_1)$

$$P_1 : S \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid \varepsilon ; A \rightarrow aS \mid \varepsilon$$

I-2) Une grammaire de type 2 pour  $L_2$  :  $G_2 = (\{a, b\}, \{S, A\}, S, P_2)$

$$P_2 : S \rightarrow Aa ; A \rightarrow bAb \mid a$$

I-3) Une grammaire de type 1 pour  $L_3$  :  $G_3 = (\{0, 1\}, \{S, B, C, D, E, F\}, S, P_3)$

$P_3 :$

$$S \rightarrow BC0 \mid BF1 \mid 00 \mid 11 \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0DB \mid 1EB \mid 0D \mid 1E$$

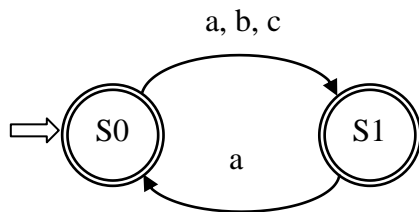
$EC \rightarrow C1$   
 $EF \rightarrow F1$   
 $DC \rightarrow C0$   
 $DF \rightarrow F0$   
 $E0 \rightarrow 0E ; E1 \rightarrow 1E$   
 $D0 \rightarrow 0D ; D1 \rightarrow 1D$   
 $C \rightarrow 0$   
 $F \rightarrow 1$

I-4) Une grammaire de type 0 pour  $L_4 : G_4 = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C, D, E, F\}, S, P_4)$

$P_4 :$

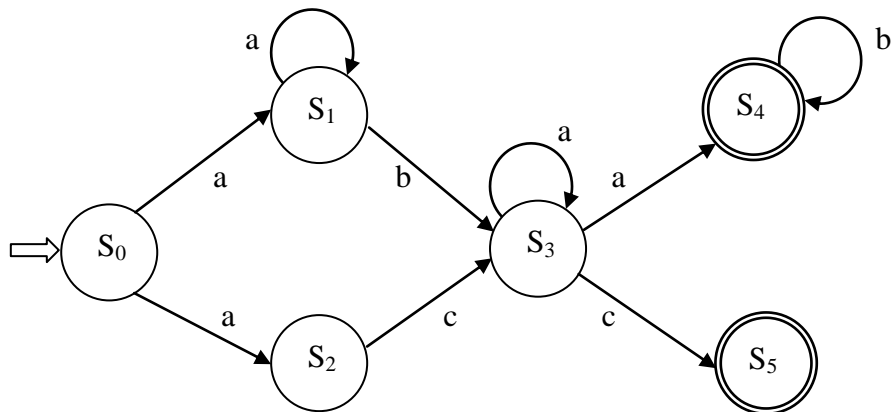
$S \rightarrow FE$   
 $F \rightarrow aFC \mid B$   
 $B \rightarrow bBA \mid D$   
 $AC \rightarrow cCA$   
 $AE \rightarrow E$   
 $Ac \rightarrow cA$   
 $Dc \rightarrow cD$   
 $DC \rightarrow D$   
 $DE \rightarrow \varepsilon$

II) Automate d'états finis simple pour le langage  $L_1 :$



Sol-EX. 3 :

1) Graphe représentant l'automate A :

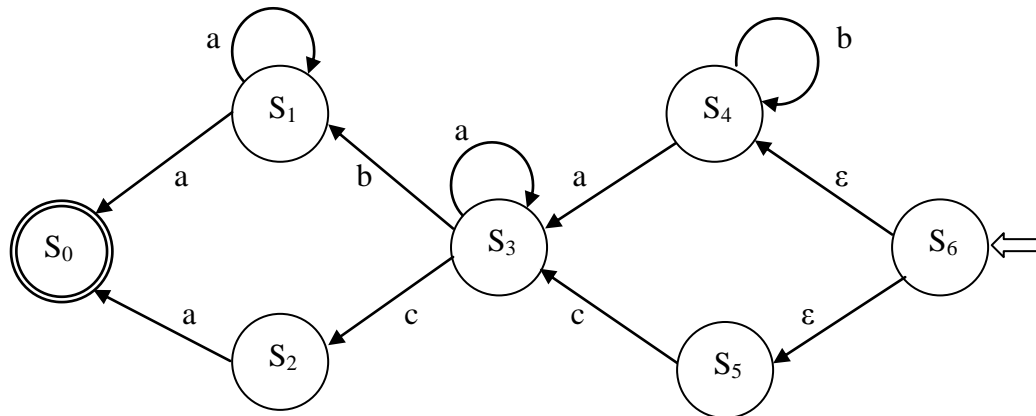


2) Automate partiellement généralisé Ar qui accepte  $(L(A))^R$  :

On procède comme suit :

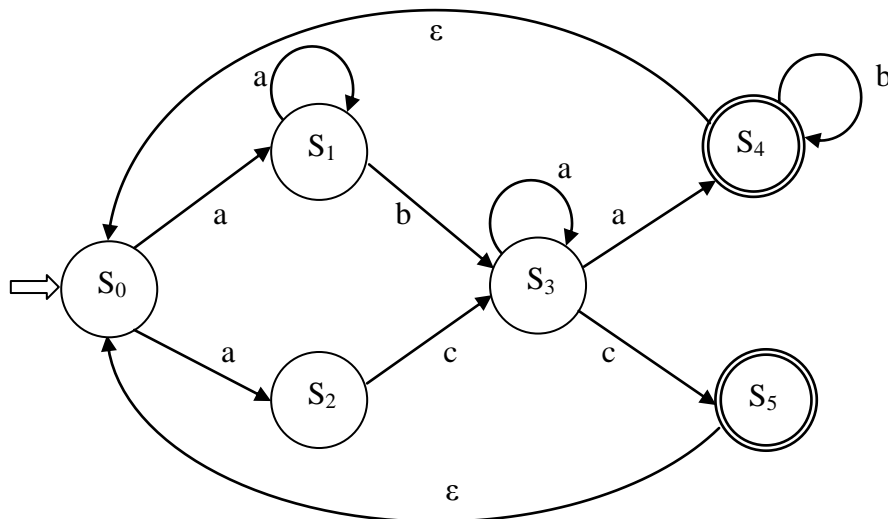
- on rend l'automate A avec un seul état final : on ajoute le nouvel état final  $S_6$  et on ajoute aussi des  $\epsilon$ -transitions des anciens états finaux de A vers  $S_6$ , typiquement les transitions :  $(\epsilon, S_4, S_6)$  et  $(\epsilon, S_5, S_6)$  ;
- chaque transition  $(w, S_i, S_j)$  de A devient une transition  $(w^R, S_j, S_i)$  de  $A_r$  (cela revient à inverser le sens des flèches, ainsi que les étiquettes, de A) ;
- l'état initial de  $A_r$  est  $S_6$ , l'état final sera  $S_0$  (l'état initial de A).

On aura donc :



3) Automate d'états finis partiellement généralisé qui accepte  $(L(A))^+$  :

À partir de A, on construit l'automate partiellement généralisé qui accepte  $L(A)^+$  en ajoutant des  $\epsilon$ -transitions des états finaux de A ( $S_4$  et  $S_5$ ) vers l'état initial de celui-ci ( $S_0$ ). On aura donc :



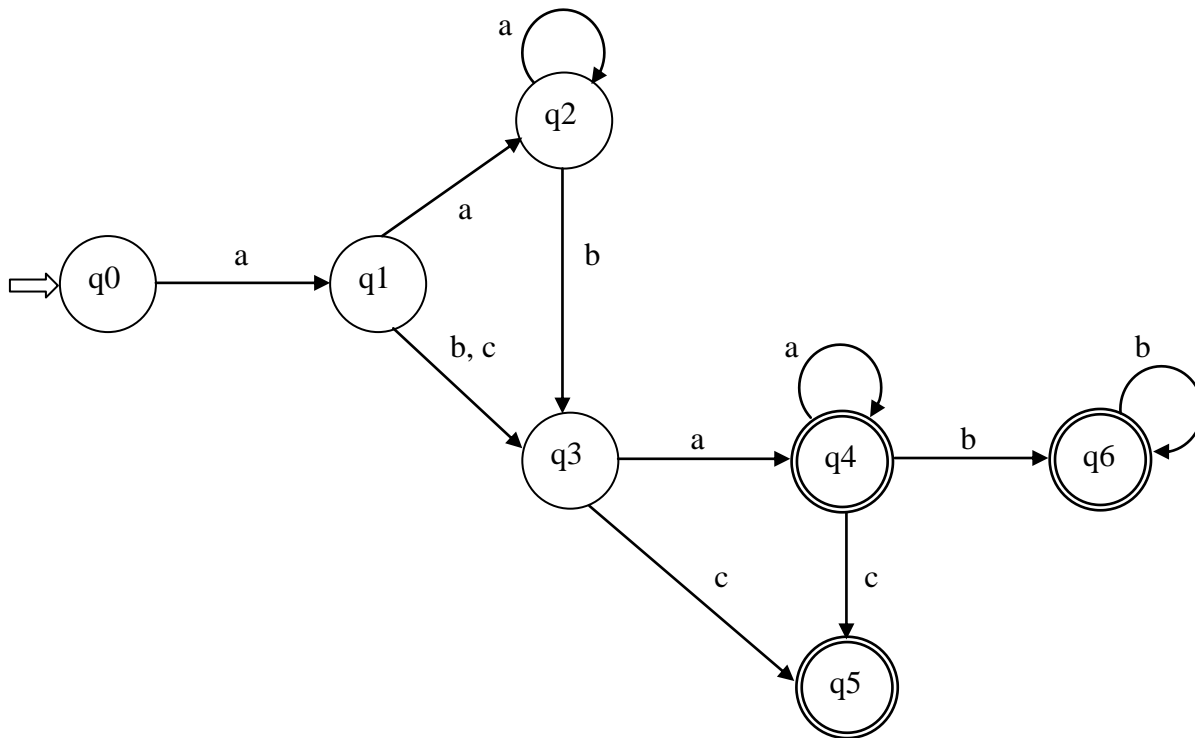
4) L'automate de A n'est pas déterministe : à partir de l'état  $S_0$ , on peut aller avec la même lettre 'a' dans deux états différents :  $S_1$  et  $S_2$  ; et aussi de  $S_3$ , on peut aller vers  $S_3$  et  $S_4$  avec la même lettre 'a'.

On va construire l'automate déterministe équivalent en construisant sa table de transition :

	a	b	c
$\langle S_0 \rangle = q_0$	$\langle S_1, S_2 \rangle$	/	/
$\langle S_1, S_2 \rangle = q_1$	$\langle S_1 \rangle$	$\langle S_3 \rangle$	$\langle S_3 \rangle$
$\langle S_1 \rangle = q_2$	$\langle S_1 \rangle$	$\langle S_3 \rangle$	/

$\langle S_3 \rangle = q3$	$\langle S_3, S_4 \rangle$	/	$\langle S_5 \rangle$
$\langle S_3, S_4 \rangle = q4$	$\langle S_3, S_4 \rangle$	/	$\langle S_5 \rangle$
$\langle S_5 \rangle = q5$	/	/	/
$\langle S_4 \rangle = q6$	/	$\langle S_4 \rangle$	/

D'où la représentation graphique de l'automate déterministe équivalent :



5) On écrit le système d'équations régulières associé à l'automate A :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = a.(X_1 \cup X_2) \\ X_1 = a.X_1 \cup b.X_3 \\ X_2 = c.X_3 \\ X_3 = a.X_3 \cup a.X_4 \cup c.X_5 \\ X_4 = b.X_4 \cup \varepsilon \\ X_5 = \varepsilon \end{array} \right.$$

De la 5<sup>ème</sup> équation on obtient  $X_4 = b^*$  ; en remplaçant dans la 4<sup>ème</sup>, on a :  $X_3 = a.X_3 \cup a.b^* \cup c$  ; de laquelle on obtient  $X_3 = a^*.(a.b^* \cup c)$ . D'où  $X_2 = c.a^*.(a.b^* \cup c)$  et  $X_1 = a.X_1 \cup b.a^*.(a.b^* \cup c)$  ; donc  $X_1 = a^*.b.a^*.(a.b^* \cup c)$ . Et la solution sera :  $X_0 = a.(a^*.b.a^*.(a.b^* \cup c) \cup c.a^*.(a.b^* \cup c))$  qui est égal à :  $X_0 = a.(a^*.b \cup c).a^*.(a.b^* \cup c)$  qui est une expression régulière dénotant  $L(A)$ .

----- Fin du corrigé du rattrapage de ThL – L2 informatique – 2017/2018 -----