Solution de série de TD N°2 : MATHS4 (ANALYSE COMPLEXE)

Fonctions complexes

Exercice 1

Solution.

1) a)

$$\begin{aligned}\text{Log }(i) &= \ln|i| + i\arg i \\ &= \ln 1 + i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Log }(2i) &= \ln|2i| + i\arg 2i \\ &= \ln 2 + i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

b) Si on pose $w = e^z$, l'équation à résoudre devienne $w^2 - 3iw - 2 = 0$ et donc

$w = \dfrac{3i \pm \sqrt{(-3i)^2 - 4(-2)}}{2} = \dfrac{3i \pm \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{3i \pm i}{2} = i$ ou $2i$.

On obtient alors $z = \text{Log}(w) = \text{Log}(i)$ ou $z = \text{Log}(2i)$, et donc

$$z = i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

ou

$$z = \ln 2 + i\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

Solution.

Si $w = e^u$ on a $u = \log w$. On obtient alors

$iz = \log(1+i)$ ou $z = \dfrac{1}{i}\log(1+i) = -i\log(1+i)$, et donc

$$\begin{aligned} z &= -i\{\ln|1+i| + i\arg(1+i)\} \\ &= -i\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\sqrt{2},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Autre méthode. En écrivant $e^{iz} = e^{(ix-y)} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$, on trouve le même résultat en égalant les parties réelles et imaginaires.

Exercice 3

Solution.

$$4\text{sh}\left(i\frac{\pi}{3}\right) = 4\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = 2\Big(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} - \big(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3}\big)\Big) = 4i\sin\tfrac{\pi}{3} = 2i\sqrt{3}.$$

$$\text{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2} - i\sin\tfrac{\pi}{2}\Big) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0.$$

Exercice 4

Solution.

i) $$(1+i)^i = e^{i1(1+i)} = e^{i\left(\ln|1+i| + i\arg\,(1+i)\right)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\right)} = e^{i\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$$

$$= e^{i\ln\sqrt{2}} \cdot e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\big(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\big), k \in \mathbb{Z}.$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Log\,(1)} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i\arg 1)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln 1 + i(0+2k\pi)\right)} = e^{i2\sqrt{2}\,k\pi} = \cos(2\sqrt{2}\,k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}\,k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

ii) $$z = -i\Big(\ln\sqrt{4} + i\big(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\big)\Big) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi - i\ln 2, k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5

Solution.

On a : $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Comme $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$, l'argument principal de $-1+i$ est donc $\frac{3\pi}{4}$. On obtient donc

$$Log\,(-1+i) = \ln|-1+i| + iArg(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}.$$

On a $(-1+i)^2 = \big(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\big)^2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

On voit que $\dfrac{3\pi}{2} \notin]-\pi, \pi]$, et donc

$$2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2} - 2\pi i} \overbrace{=}^{Corollaire??} 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi].$$

On obtient

$$Log\big((-1+i)^2\big) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

On remarque alors que

$$Log\big((-1+i)^2\big) \neq 2Log\,(-1+i)$$

puisque leurs différence vaut $-2\pi i$.

$\square$

Good luck and healthy days