وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة القادسية – كلية التربية

قسم الرياضيات

هندسة أنظمة المعادلات التفاضلية

بحث مقدم الى مجلس قسم الرياضيات-كلية التربية-جامعة القادسية

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

إعداد الطالبة

سجى مراد

إشراف

د. ميثاق حمزة كعيم

2017

1. اوليات وتعاريف

1.1 تعريف [3]:

تعرف المنظومة الخطية بالصيغة الاتية :

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+ \dots +a_{1n}(t)x_n+g_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+ \dots +a_{2n}(t)x_n+g_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\dots+a_{nn}(t)x_n+g_n(t) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

ويمكن اعادة كتابة هذه المنظومة بصيغة المعلومات لتكون بالشكل الاتي :

$$\dot{x} = A(t)X + G(t)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$G(t)= \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t)= \begin{pmatrix} a_{11}(t)a_{12}(t)\dots a_{1n}(t) \\ a_{12}(t)a_{22}(t)\dots a_{2n}(t) \\ a_{n1}(t)a_{n2}(t)\dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

ويطلق على المصفوفة $A(t)$ اسم مصفوفة المعاملات ,وتسمى المنظومة خطية غير متجانسة اذا كانت $G(t) \neq o$ اما اذا كانت $G(t) = o$ فالمنظومة تسمى خطية متجانسة اي ان

$$\dot{X} = A(t)X\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

2.1 مثال:

لتكن المنظومة

$$\dot{u} = au + bv$$

$$\dot{v} = cu + dv \text{ .....(4)}$$

حيث ان a ,b, c, d ثوابت

برهن على ان u حل للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\ddot{u} = (a + d)\dot{u} + (bc - ad)u \text{ ... ...*}$$

البرهان:

بما ان:

$$\dot{u} = au + bv \rightarrow \ddot{u} = a\dot{u} + b\dot{v} \text{ .....(5)}$$

وايضاً فان:

$$\dot{u} = au + bv \rightarrow bv = \dot{u} - au$$

ولكن:

$$\dot{v} = cu + dv$$

وبالتعويض عن قيمة $\dot{v}$ في المعادلة (5) نجد ان:

$$\ddot{u} = a\dot{u} + b\dot{v} = a\dot{u} + b(cu + dv) = a\dot{u} + bcu + bdv$$

$$\ddot{u} = a\dot{u} + bcu + d(bv) = a\dot{u} + bcu + d(\dot{u} - au)$$

$$\ddot{u} = a\dot{u} + bcu + d\dot{u} - dau = (a + d)\dot{u} + (bc - ad)u$$

3.1 تعريف [6]:

لنأخذ المنظومة

$$\dot{y} = A(t)y$$

حيث ان

$$A(t)=\{a_{ij}(t)\}$$

هي nxn مصفوفة للمعاملات وان $a_{ij}(t)$ دوال مستمرة في فترة I .

فان X(t) يسمى حل للمعادلة التفاضلية اعلاه ,اذا كان

لكل عدد حقيقي t في I. ويقال عن هذا الحل بأنه حل لمسألة القيم الابتدائية

$$\dot{Y}=A(t)Y \quad ,Y(t_o)=X_o, \quad X_o \in R$$

اذا كان X يحقق

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t), \quad X(t_o)=X_o$$

بعبارة اخرى ان X هو حل للمعادلة التفاضلية المار بنقطة t_o .

4.1 مثال :

حالة n=1

ليكن $X_o \in R$ فأن

$X:R\rightarrow R \quad , \quad X(t)=x_o\, e^{at}$ هو حل لمسألة القيم الابتدائية

$$\dot{Y}=Ay, \quad y(o)=x_o$$

وذلك لان الدالة x(t) تحقق كلا من المعادلة التفاضلية والشرط الابتدائي حسب الاتي :

$$\dot{X}(t)=xo\ a\ e^{at}$$

$$=a\{x_o\, e^{at}\}$$

$$=a\ x(t)$$

$x(o)=xo\ e^{a(o)}=x_o$

5.1 مثال :

حالة n = 2

ليكن $X(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

فأن $X:I\rightarrow \quad R^2$

المعرفة كالأتي

$$X(t)= \begin{bmatrix} 2t5 + 5t - 2 \\ 10t4 - 10t - 3 \end{bmatrix}$$

حيث I هي الفترة $I = \{t \in R: t > 0\}$

هو حل لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$\dot{Y}=A(t)Y, \qquad Y(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A(t)= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

وذلك لان الدالة X(t) تحقق المنظومة التفاضلية حسب الاتي

$$\dot{x}= \begin{bmatrix} 10t^4-10t^{-3} \\ 40t^4 + 30t^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10t^{-2} & 2t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t^5 + 5t^{-2} \\ 10t^4 - 10t^{-3} \end{bmatrix} =A(t)x$$

اضافة الى انها تحقق الشرط الابتدائي

$$\begin{bmatrix} 2+5 \\ 10-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.1 مثال :

n =2

لتكن $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

مصفوفة ذات عناصر ثابتة (مصفوفة المعاملات) فأن المنظومة

$\dot{X}=AX$

ويمكن ان تكتب على هيئة زوج من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولى

$\dot{x}=-y$

$\dot{y}=x$

ولتعرف الدالة

$X:R\rightarrow R^2$

بالعلاقة التالية

$$X(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Xo\\ yo\end{bmatrix}$$

اي ان

$X(t)=x_o \text{ Cost} - y_0 \text{ Sint}$

$Y(t)= x_o \text{ Sint} + y_o \text{ Cost}$

7.1 تعريف :

مصفوفة الدوال M المربعة التي اعمدتها هي الحلو ل X_i تسمى مصفوفة حل Matrix Solution للمنظومة في الفترة I. واذا كانت Xi مستقلة خطيا فان M تسمى مصفوفة اساسية Fundamentel Matrix للمنظومة في الفترة I. اي بعبارة اخرى المصفوفة M هي مصفوفة حل اذا وفقط اذا

$\dot{M}=A(t)M$ واذا كانت $M(t_o)=I$

حيث I مصفوفة محايدة Identity Matrix فأن مصفوفة الحل M تسمى المصفوفة الاساسية القياسية في t_o (Standared Fundamental Matrix)

8.1 مبرهنة [9] :

اذا كانت M مصفوفة حل للمنظومة في الفترة I فأن

$$\det M(t)=\det M(to)\ \mathrm{Exp}\left(\int_{to}^{t}\sum_{i=1}^{n} aii(t)dt\right)$$

لكل t في t_o نقطة في I.

9.1 تعريف:

اذا كانت M مصفوفة اساسية للمنظومة (3) وليكن B متجه عمودي اختياري فان المتجه MB يسمى حل عام للمنظومة (3).

10.1 تعريف (المنظومات الخطية اللامتجانسة)

لنأخذ المنظومة الخطية اللامتجانسة التالية

$\dot{Y}=A(t)Y+G(t)$ .....(6)

حيث ان A,G مستمرة في الفترة I. ولنفترض ان M(t) هي المصفوفة الاساسية للجزء المتجانس من المنظومة اعلاه ,اي حلا للمنظومة

$\dot{Y}=A(t)Y$.....(7)

فأنه من الممكن ايجاد الحل العام للمنظومة (6) اذا عرفت المصفوفة الاساسية للجزء المتجانس كالاتي :

نفترض ان صيغة الحل العام هي

$X(t)=MC+X^{*}(t)$.....(8)

حيث ان C متجة عمود اختياري ثابت وان X^{*} هو حل خاص وليكن هذا الحل الخاص بالصيغة التالية :

$x^{*}(t)=M(t)V(t)$.....(9)

حيث ان V(t) دالة متجهة غير معينة وبأخذ مشتقة الطرفين نحصل على

$$\dot{x^{*}} = \dot{M}V + M\dot{V}$$

ولما كانت M هي مصفوفة حل للمنظومة (7) اي ان

$$\dot{M}=AM$$

فالبتعويض في المنظومة (1-4-1) نحصل على

$$AMV+M\dot{V}=AMV+G$$

اي ان

$$M\dot{V}=G$$

ولما كانت M مصفوفة غير منفردة فأن

$$\dot{V}=M^{-1}G$$

وبالتكامل نحصل على صيغة الدالة المجهولة V وهي

$$V(t)=\int_{to}^{t} M^{-1}\ (t)G(t)dt$$

حيث to في الفترة تصبح

$$X^{*}(t)=M(t)\int_{to}^{t} M^{-1}\ (t)G(t)dt$$

ويكون الحل العام للمنظومة اللامتجانسة يكون بالصيغة

$$X(t)=M(t)C+M(t)\int_{to}^{t} M^{-1}\ (t)G(t)dt$$

بذلك يمكننا استنتاج المبرهنة التالية مباشرة

<u>11.1 مبرهنة :</u>

اذا كانت M مصفوفة اساسية للمنظومة المتجانسة

فأن

$$X(t)=M(t)\int_{to}^{t} M^{-1}(t)G(t)dt$$

هو حل للمنظومة اللامتجانسة

الذي يحقق الشرط الابتدائي

$X(t_o)=o$

حيث to في نقطة I. وان الحل الذي يحقق الشرط الابتدائي

$X(t_o)=E$

هو

$$X(t)=M(t)\ M(t_0)E+M(t)\int_{to}^{t} M^{-1}\ \ (t)G(t)dt$$

<u>12.1 مثال :</u>

المصفوفة

$$M(t)=\begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

مصفوفة اساسية للمنظومة المتجانسة $\dot{Y}=AY$

حيث ان A مصفوفة المعاملات A

لذا فان الحل العام للمنظومة اللامتجانسة التالية:

$\dot{Y}=AY+G$

عندما تكون G معرفة كالاتي $G(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$

والذي يحقق الشرط الابتدائي $Xo=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

يكون بالصيغة

$$X(t)=M(t)M^{-1}(o)E+M(t)\int_o^t M^{-1}(t)G(t)dt$$

$$X(t)=\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & 2e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & 2e^{2t}\end{bmatrix}\int_0^1\begin{bmatrix}2e^{-t} & -e^{-t}\\ -e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix}3e^t-e^{2t}\\ 3e^t+2e^{2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & 2e^{2t}\end{bmatrix}\int_0^1\begin{bmatrix}2e^{-t}-te^{-t}\\ -e^{-2t}+te^{-2t}\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix}3e^t-e^{2t}\\ 3e^t+2e^{2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^t & e^{2t}\\ e^t & 2e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^{-t}-e^{-t}+1\\ -\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$X(t)=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t+4e^t-\frac{5}{4}e^{2t}\\ -\frac{1}{2}+4e^t-\frac{5}{2}e^{2t}\end{bmatrix}$$

13.1 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية / Eigenvalues and eignvectors:

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX=\lambda X$ حيث λ ثابت ويسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A.

لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX=\lambda X$ بالصورة:

$$(\lambda I-A)X=0$$

و التي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا $\det(\lambda I-A)=0$. والمحدد الموجود على يسار المعادلة السابقة يسمى المعادلة المميزة للمصفوفة A ونرمز له بالرمز P_n.

أي ان القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة المميزة $P_n(\lambda)$.

ولايجاد المتجهات الذاتية حيث كل قيمة ذاتية تحدد متجه ذاتي ، نفرض ان B هو متجه ذاتي للقيمة الذاتية λ_1 فيمكن ايجاده من خلال العلاقة الاتية:

$$(\lambda_1 I-A)\ B=0$$

14.1 حالات القيم الذاتية :

1 -حالة الجذور حقيقية ومختلفة :-لتكن الجذور الحقيقية المختلفة هي

ولتكن المتجهات التالية هي متجهات خاصة مقابلة لهذه الجذور على التوالي هي
$B_1,B_2,B_3.....B_n$
ان هذه المتجهات بالضرورة تكون متجهات مستقلة خطيا ,وبالتالي فأن كل متجه من المتجهات التالية:

$$B_1e^{\lambda_1 t}, B_2e^{\lambda_2 t}, \dots, B_ne^{\lambda_n t}$$

هو حل للمنظومة (3)

مثال : لايجاد الحل العام للمنظومة
$\dot{Y}$=AY اذا كانت $A=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
بعد حساب القيم الخاصة للمصفوفة A والتي هي λ =-1 , λ =-3 جذور حقيقية مختلفة) ,ثم نحسب المتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم الخاصة نحصل على ,وهي على التوالي

$B2=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ $\qquad$ $B_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

وعليه فأن كلا من $\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix} e^{t}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} e^{-3t}$

حل للمنظومة وعليه فأن

$$M=\begin{bmatrix}-e^{t} & -e^{-3t}\\ 5e^{t} & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة حل . ولما كان $\det M(t)=4e^{-2t}\neq o$ لكل $-\infty<t<\infty$ فان M هي مصفوفة اساسية وعليه فأن الحل العام للمنظومة هو

$$X(t)=M(t)C$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -e^{t} \\ 5e^{t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

حيث ان C2,C1 مركبات المتجة الاختياري C وان x(t),y(t) مركبات المتجه X(t)

2 -حالة الجذور اعداد مركبة :-

اذا كانت $\lambda_1 = \propto + i\beta$ احدى القيم الخاصة للمصفوفة A في المنظومة (3) فأن مرافق هذه القيمة λ_{1t} ايضا قيمة خاصة اي ان $\lambda = \propto - i\beta$ حيث ان $i=\sqrt{-1}$ وهذا يؤدي الى ان المتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم ايضا تكون احدهما مرافق للاخر . فمثلا اذا كانت B_1,B_2 متجهات خاصة مقابلة على التوالي للقيم الخاصة λ_1, λ_2 فأن $B_1=B_2$ وبالتالي فان كل متجه من المتجهات:

هو حل للمنظومة . وهكذا

<u>مثال</u> :

اذا كانت

$\dot{Y}$=AY حيث $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

فأن القيم الخاصة هي $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$ والمتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم على التوالي هي $B1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ $B2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ اذا مصفوفة الحل هي:

$$M(t) = \begin{bmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{bmatrix}$$

واكثر من ذلك ان هذه المصفوفة اساسية لان محددها لا يساوي صفر. لذلك فأن الحل العام للمنظومة هو:

$$X(t)=M(t)C$$

$$X(t)= M(t) = \begin{bmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (C_1 + C_2)cos2t \\ -2(C_1 + C_2)sin2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i(C_1 - C_2)sin2t \\ 2i(C_1 - C_2)cos2t \end{bmatrix}$$

وذلك لان

$$e^{i\theta}=\cos\theta + i \sin\theta$$

لو كان $a_1=c1+c2$ ، $a_2=i(c1-c2)$

فنحصل على الحل العام وهو

$$X(t)=a1\begin{bmatrix}\cos 2t\\ -2\sin 2t\end{bmatrix}+a2\begin{bmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t\end{bmatrix}$$

حيث a1,a2 ثوابت اختيارية .

3 - حالة تكرار الجذور

ان جذور المعادلة المميزة قد يكون بعضها متكررا ,ولنفترض ان الجذر λ متكرر m من المرات في المنظومة (3) (حيث ابعاد المصفوفة A هي nxn) .هنالك حالتان :

أ - عندما تكون رتبة (Rank) المصفوفة $A-\lambda I$ تساوي n-m ففي هذه الحالة يكون هنالك m من المتجهات الخاصة المستقلة خطيا مقابلة لهذه القيم الخاصة . وبالتالي فأن كل متجه يعطي حلا من هذه الحلول تتكون المصفوفة الاساسية .

ب -عندما تكون رتبة المصفوفة $A-\lambda I$ اكبر من n-m ففي هذه الحالة يكون عدد المتجهات الخاصة المستقلة خطيا المقابلة خطيا المقابلة للقيمة λ اقل من m عندها يكون حساب المتجهات الخاصة كالاتي:

نعرف مجموعة من المتجهات Pn, ... ,P2,P1,Po كالاتي

$$(A-\lambda I)P_k=o$$
$$(A-\lambda I)P_{k-1}=KP_k$$
$$(A-\lambda I)P_{k-2}=(k-1)P_{k-1}$$
$$(A-\lambda I)P_{k-3}=(k-2)P_{k-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$
$$(A-\lambda I)P_1=2P_2$$
$$(A-\lambda I)P_o=P_1$$

لما كان $\det(A-\lambda I)=o$ فأن المعادلة الاولى لها حلا لاصفري ومن هذا الحل نستمر في ايجاد حلول المعادلات الباقية وعند حساب هذه المتجهات P_i نعرف B_k بالطريقة التالية

$$B_o(t)=P_k$$
$$B_1(t)=P_{k-1}+tP_k$$
$$B_2(t)=P_{k-2}+tP_{k-1}+t^2P^k\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$
$$B_i(t)=P_{k-i}+tP_{k-i+1}+\ldots..+t^{i-1}P_{k-1}+t^iP_k$$
$$B_k(t)=P_o+tP_1+\ldots..+t^2P_2+t^kP_k$$

ومن هذه المتجهات نكون حلول مستقلة خطيا وهي

$$B_1(t)e^{\lambda t}\ ,\ B_2(t)e^{\lambda t},\ \ldots..,\ B_ke^{\lambda t}$$

15.1 مثال : لتكن لدينا $\dot{Y}=AY$ حيث ان $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

المصفوفة المميزة للمصفوفة A هي

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة هي

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^2=o$$

وعليه فان القيم الخاصة هي : (-1) غير متكررة و(2) متكررة مرتين

لذا فان القيمة الاولى $\lambda=-1$ تعطينا مباشرة متجها خاصا B_1 من

$$(A+I)B_1 = o$$

اي ان $B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

اما بالنسبة للقيمة الخاصة المتكررة $\lambda=2$ فتحسب متجهاتها الخاصة كالاتي

نحسب المصفوفة

$$A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة واضح انها ذات رتبة (2) وعليه فان المتجهات الخاصة لـA نحصل عليها من

$$(A-2I)P_1 = o$$

وهذا يؤدي بنا الى

$P_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ اما Po فيحسب من $(A-2I)P_o = P_1$

ومن هذه المنظومة نحصل على

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولما كانت

$$B_o = P_1$$

$$B_1 = P_o + tP_1$$

فان الحلول الثلاثة المستقلة خطيا هي

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3t \\ 1-2t \end{bmatrix} e^{2t} \quad ، \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} \quad ، \quad X_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

واخيرا فان مصفوفة الحل الاساسية هي:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 3e^{2t} & (2+3t)e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \end{bmatrix}$$

2. هندسة انظمة المعادلات التفاضلية

(1.2) مستوى الطور Phase Plane

ان حلول المعادلة التفاضلية

$$\dot{X}=AX..... \qquad (1.2)$$

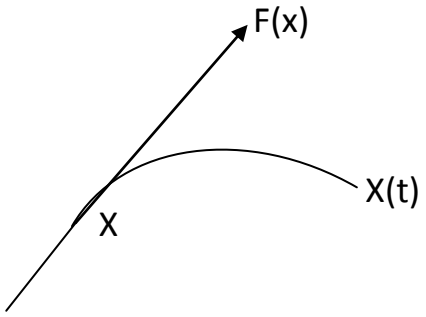
(حيث ان A مصفوفة nxn) عبارة عن منحنيات في الفضاء R^n بحيث ان كل منحني عبارة عن دالة وليس مجرد مجموعة من النقاط ولنتصور ان حل المعادلة (1.2) الذي هو X عبارة عن حركة نقطة خلال زمن بحيث ان موضع النقطة عند اللحظة t هو X(t) الواقع في الفضاء R^n وبذلك فان سرعة تلك النقطة في اللحظة t هي $\dot{X}$. فالمعادلة التفاضلية (1.2) تعرف لنا قانون لحركة النقاط .فعندما يكون موضع النقطة X فانها ستتحرك بسرعة AX (التي تتضمن اتجاه وانطلاق) وبذلك يفسر لنا المعنى الحركي للمعادلة التفاضلية اعلاه . والحركة التي تتعرف بهذا الشكل في الفضاء R^n تسمى مستوي الطور للمعادلة التفاضلية (1.2) وعليه فأن كل نقطة X من نقاط مستوي الطور يرتبط بها متجه وهو متجه السرعة AX .اذا المصفوفة A تعرف دالة

$$F:R^n \rightarrow R^n$$

بالطريقة التالية

$$X \rightarrow AX=F(x)$$

التي ترتبط بكل نقطة X من نقاط مستوى الطور المتجه F(x) هذه الدالة F تسمى حقل متجهي Vector Field وكما في الشكل (2-1)

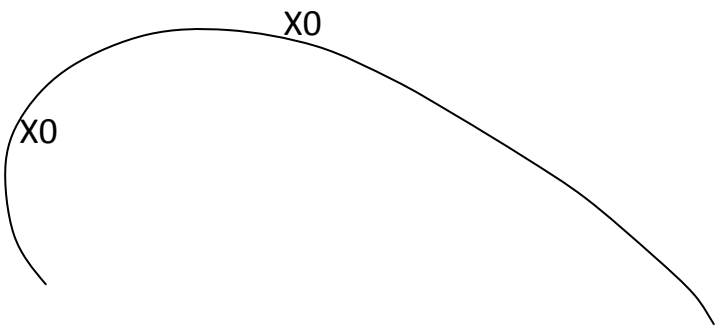


الشكل (2-1)

2.2 تعريف :

1 -ليكن A هو nxn مصفوفة و Xo نقطة R^n. فأن مجموعة نقاط اقتفاء اثر حل المعادلة التفاضلية (1.2) الذي يمر خلال النقطة Xo عند t=o تسمى مسار النقطة Xo (Orbit) اي ان:

مسار النقطة Xo={X(t) حيث ان t في R وX(t)=Xo }



شكل (2-2)

2 -مجموعة كل مسارات المعادلة التفاضلية يسمى صورة الطور (Phase Portrait) لتلك المعادلة التفاضلية .

3.2 مثال :

ليكن

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فان متجه الحقل في النقطة (x,y) هو x اي ان متجه الحقل لكل نقطة هو متجه عمودي على متجه موضع تلك النقطة . وان طول ذلك المتجه هو x^2+y^2. فمسار النقطة (xo,yo) هو مجموعة نقاط اقتفاء اثر الحل المعرف بالمعادلة

$$X(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} xo \\ yo \end{bmatrix}$$

وعليه فان

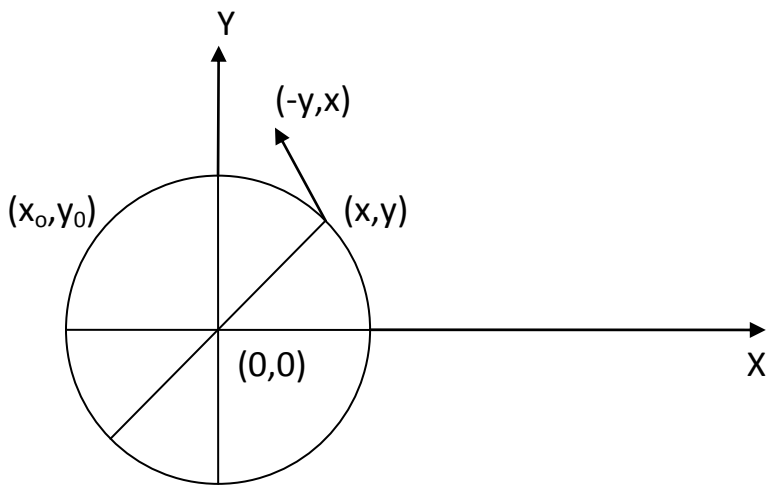
$X(t)=x_o \cos t-y_o \sin t$

$Y(t)=x_o \sin t+y_o \cos t$

وبذلك فان

$X^2(t)+Y^2(t)=x_o^2+y_o^2$

اذا مسار النقطة (x_o,y_o) هو عبارة عن دائرة مركزها النقطة (o,o) ونصف قطرها $x_o^2+y_o^2$ كما في الشكل (2-3) .



شكل (2-3) صور طور المنظومة

في الحقيقة ان حل هذه المعادلة التفاضلية المار بنقطة (xo,yo) عند t=o هو حركة النقطة على دائرة وبأنطلاق ثابت قدرة $x_o^2+y_o^2$ فالمسار هو دائرة كاملة وان صورة الطور هي عبارة عن مجموعة كل الدوائر المتمركزة في نقطة الاصل بما فيها نقطة الاصل نفسها .

<u>4.2 مثال :</u>

في المعادلة التفاضلية

$\dot{X}=ax \ ,a>o$

مستوى الطور يعرف على R والحقل المتجهي هو الدالة

$x \rightarrow ax = F(x)$

لاحظ الشكل (2-4)

الحل الذي يمر بالنقطة xo عند t=o هو

$X(t)=x_o\, e^{at}$

فعندما تتغير t من – الى + فان e^{at} تغطي كل الاعداد الحقيقية الموجبة

وبالتالي فان مسار النقطة xo هو $\{x_o\, e^{at} : t \in R\} = \{sx_o : s>o\}$

فاذا كانت $x_o > o$ فان مسارها هو $\{s : s > o\} = R^+$

واذا كانت $x_o = o$ مسارها هو o

اما اذا كانت $xo < o$ فان مسارها هو $\{s : s < o\} = R^-$

5.2 مثال :

في المعادلة التفاضلية المذكورة في المثال (2-4)

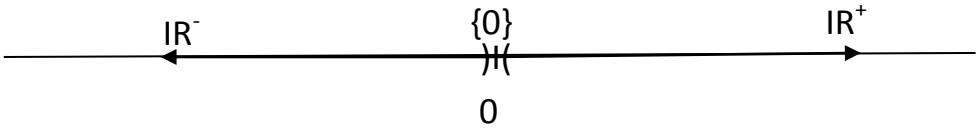
$\dot{x}=ax \;,\; a> o$ المسارات الموجهة هي

R^+ موجه باتجاه تزايد x

و R^- موجه باتجاه تناقص x

اما o فأنه مسار غير موجه

لاحظ الشكل (2-6)



شكل (6-2) المسارات الموجهة للمعادلة $\dot{x}=ax$ و $a<o$

6.2 تعريف:

تسمى المصفوفة A زائدية اذا كانت قيمها الذاتية تقع خارج المحور التخيلي . اذا كانت المصفوفة A زائدية فان عدد القيم الذاتية ذات الجزء الحقيقي السالب يسمى دليل المصفوفة A .

المصفوفة الغير زائدية تسمى مصفوفة ناقصية.

7.2 مثال:

لتكن A هي المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

فان القيم الذاتية لها هي:

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

لذا فان هذه المصفوفة هي زائدية ودليلها واحد.

8.2 مبرهنة [4]:

لتكن A مصفوفة من الدرجة 2 فان: A ناقصية اذا وفقط اذا $det(A)=0,$ او $(det(A)\neq 0, tr(A)=0)$

9.2 مبرهنة [5]:

اذا كانت λ_1, λ_2 القيم الذاتية للمصفوفة A فان:

$$A^2-tr(A)A+det(A).I=0 \quad - 1$$
$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=0 \quad - 2$$

10.2 مبرهنة [ ]:

اذا كانت λ_1, λ_2 القيم الذاتية للمصفوفة A وكان

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$Q_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)$$

اما اذا كان $\lambda = \lambda_2 = \lambda_1$ فنعرف:

$$Q = (A - \lambda I)$$

فان:

$1 - Q_1 + Q_2 = I, \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 = A$

2-$Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0, Q_1^2 = Q_1 , Q_2^2 = Q_2$

3-$\det(Q_1) = \det(Q_2) = 0$

4-

القيم الذاتية للمصفوفة Q_1 هي 0 و 1

القيم الذاتية للمصفوفة Q_2 هي 0 و 1

11.2 تعريف [4]:

تعرف المتسلسلة اللانهائية التالية:

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$$

على انها تقارب لمصفوفة من الدرجة n×n والتي يمكن من خلالها ان نعرف المصفوفة الاسية e^A كالاتي:

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$$

12.2 مأخوذة [6]:

اذا كان كل من A,B مصفوفة من الدرجة $n\times n$ فان :

1- $e^{A+B}=e^{A}.e^{B}$

2- $e^{A(t1+t2)}=e^{At1}.e^{At2}$

13.2 مبرهنة [6]:

لتكن A مصفوفة من الدرجة 2×2 وكان λ_1, λ_2 القيم الذاتية للمصفوفة A فان:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}Q_1 + e^{\lambda_2 t}Q_2$$

$$X(t) = \left(e^{\lambda_1 t}Q_1 + e^{\lambda_2 t}Q_2\right)X_0$$

14.2 النماذج الزائدية : Hyperbolic Types

ان متسلسلة المصفوفة الاسية هي عبارة عن متسلسلة قوى في t والتي تكون تقاربية لجميع قيم t. لو اخذنا المشتقة لحدود المتسلسلة حدا حدا لحصلنا على العلاقة التالية

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At} \quad .....2.2$$

واذا كان Xo نقطة في الفضاء R2. اي مصفوفة 2x1 . فالدالة

المعرفة بالشكل $X:R\rightarrow R^2$

تحقق الاتي $t\longmapsto e^{At}Xo=X(t)$

$$\dot{X}(t)= \frac{d}{dt}e^{At}\,Xo$$

$$=A\,e^{At}\,xo$$

$$=A\,X(t)$$

لكل قيم t. وعليه فان هذه الدالة X(t) هي حل للمعادلة

$$\dot{X}=AX.....3.2$$

التي تحقق الشرط الابتدائي $(0,X_0)$.

ان التركيب التحليلي للمصفوفة الاسية المقدم سابقاً يمكننا من البحث عن طبيعة وشكل المسارات كما سيتبين لاحقا .

سندرس الاشكال التركيبية لمسارات المعادلة 3.2 عندما تكون المصفوفة A مصفوفة زائدية .

اولا : اذا كانت λ_1, λ_2 عددين حقيقيين غير متساويين

$$\det Q1=Q$$

وليكن عمودا المصفوفة Q1 هي C2.C1 اي ان

$$Q1=[C1 \quad C2]$$

فيجب ان يكون هذان العمودان غير مستقلة خطيا . من جهة اخرى $Q1\neq o$

لانه لو كان صفرا يجب ان يكون $A=\lambda_2 I$ وهذا يعني ان القيم لخاصة للمصفوفة A متساويتان وهذا خلاف الفرض.

اذا احد العمودين C1,C2 لا يساوي صفرا . وليكن $C1\neq o$. لنفترض ان المتجة C1 واقعا على خط امتداد الخط المستقيم L1 المار بنقطة الاصل . اذا اي تركيب خطي للمتجهين C1,C2 لابد ان يكون واقعا عل المستقيم L1 .لذلك

$$L1=\{Q1\ X:X \in R^2\}$$

ليكن واضحا ان الشئ الذي حدد الخط L1 هو احد الاعمدة غير الصفرية من المصفوفة Q1 يسمى الخط المستقيم L1 محور المصفوفة Q1.

بنفس الاسلوب نجد L2 اي محور المصفوفة Q2 الذي يتحدد بواسطة احد اعمدة المصفوفة Q2 غير الصفرية . ولما كانت $\lambda_1\neq \lambda_2$ فان L1 ,L2 لا يتقاطعان الا عند نقطة الاصل .

<u>15.2 مثال :</u> لتكن المصفوفة A هي $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

القيم الخاصة لهذه المصفوفة هي $\lambda_2=-2$, $\lambda_1=3$ فاذا

$$Q1=1/(\lambda 1-\lambda 2)(A-\lambda 2I)$$

$$=\begin{bmatrix}4/5 & -4/5\\ -1/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

$$Q2=1/(\lambda 2-\lambda 1)(A-\lambda 1I)$$

$$=\begin{bmatrix}1/5 & 4/5\\ 1/5 & 4/5\end{bmatrix}$$

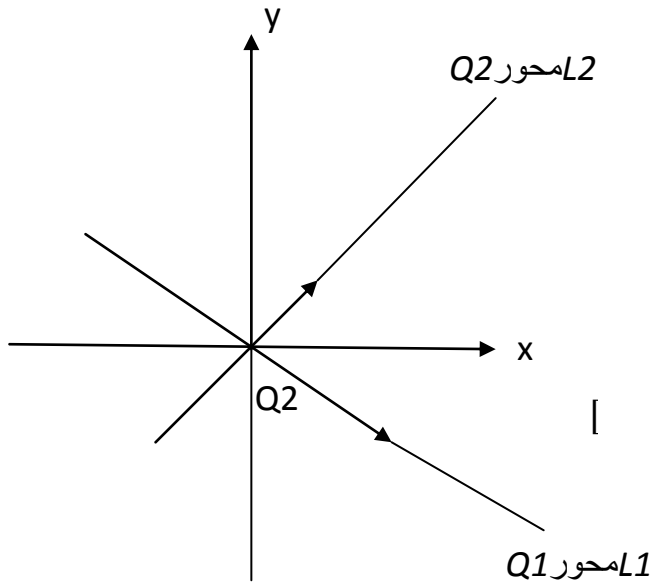
نلاحظ هنا ان كلا العمودين في المصفوفة Q1 لا تساوي صفرا . وكذا الحال بالنسبة للمصفوفة Q2 .اذا لتحديد محور Q1,Q2 يمكن اختيار اي من هذين العمودين من كل مصفوفة .فمحور Q1 يحدد من المتجه

وهي عبارة عن الخط المستقيم المر بنقطة الاصل والي على امتداد هذا المتجه اي ان

$$L1=\left\{w\begin{bmatrix}4/5\\ -1/5\end{bmatrix}: w\in R\right\}$$

وبنفس الاسلوب يكون محور Q2 هو

$$L2=\left\{w\begin{bmatrix}1/5\\ 1/5\end{bmatrix}: w\in R\right\}$$



شكل (2-9) محاور Q1,Q2 للمصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ومن المعلوم ان صيغة الحل الذي يمر بالنقطة Xo عند t=o هي $X(t)=e^{At}$ Xo

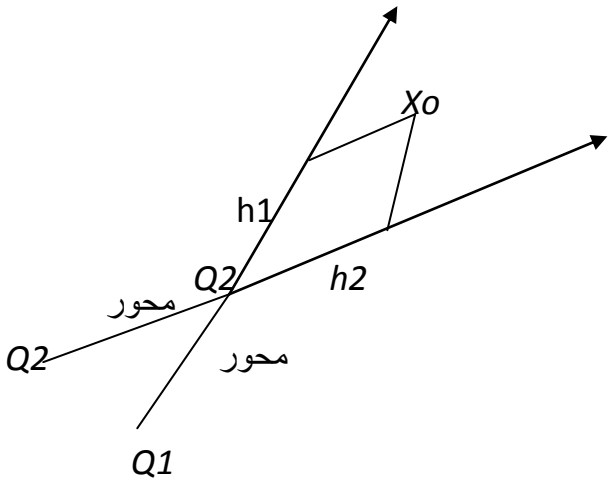
ومن مبرهنة 13.2 نجد:

$$=e^{\lambda_1 t}Q_1X_0 + e^{\lambda_2 t}Q_2X_0$$

$$= e^{\lambda_1 t}h1 + e^{\lambda_2 t}h2$$

حيث ان

h1=Q1Xo , h2=Q2Xo ،اي ان h1 تقع على L1 محور Q1 وh2 على محور L2 محور Q2



وعليه يمكن كتابة الحل بالاشكال الاتية:

$$X(t) = e^{\lambda_1 t}\left(h1 + e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}h2\right)$$

او

$$X(t) = e^{\lambda_2 t}\left(h2 + e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}h1\right)$$

<u>16.2 مثال:</u>

اذا كان $\dot{X} = AX$ يمثل نظام معادلات تفاضلية بحيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

نجد ان القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي: λ_2=-1,λ_1= -5

وبذلك فان المصفوفة زائدية ذات دليل 2. ولايجاد محاور Q_1,Q_2 كالاتي:

$$Q_1 = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وبذلك فان اعمدة المصفوفة Q_1 هي:

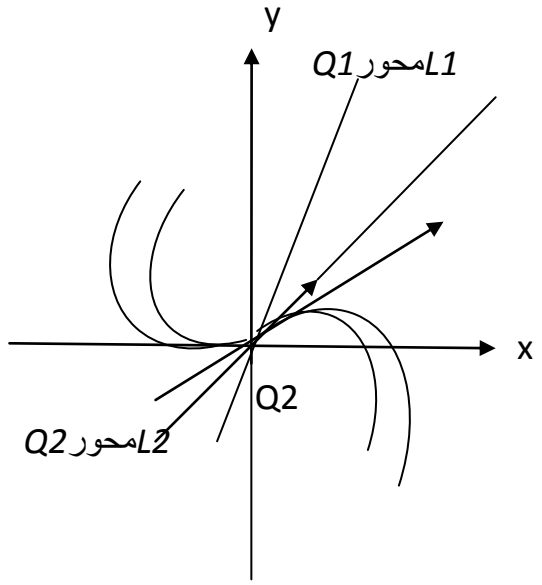
$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, -7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اذاً محور Q_1 هو الخط المستقيم المار بنقطة الاصل و الذي يحتوي على المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

اما اعمدة المصفوفة Q_2 فهي:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اذاً محور Q_2 هو الخط المستقيم المار بنقطة الاصل و الذي يحتوي على المتجه $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$



مسارات النظام

17.2 مثال:

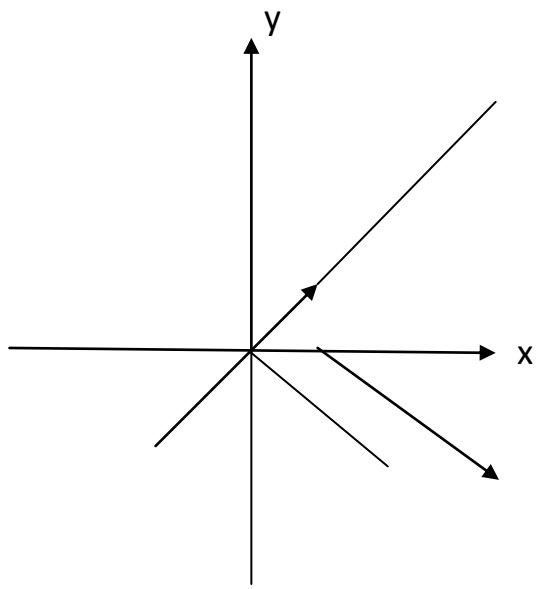
اذا كان $\dot{X} = AX$ يمثل نظام معادلات تفاضلية بحيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

نجد ان القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي: $\lambda_2=4+2i, \lambda_1= 4-2i$

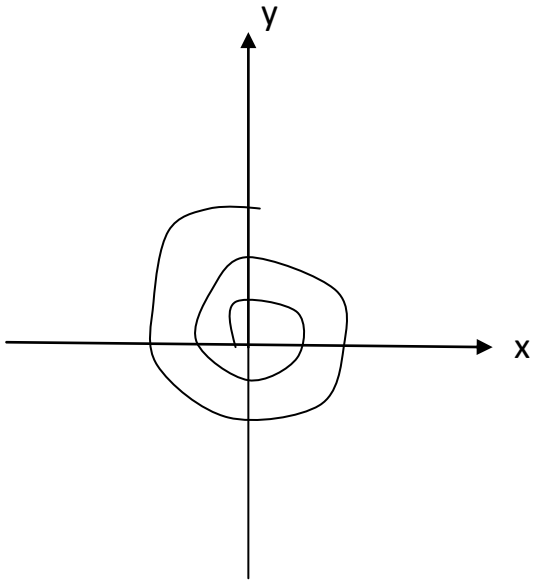
لذلك فان المصفوفة هي زائدية ودليلها صفر. نجد ان المسارات تدور مبتعدة عن نقطة الاصل اما باتجاه عقرب الساعة او عكس عقارب الساعة . وابسط طريقة لتحديد اتجاه الدوران هو ان نحسب الحقل المتجهي على نقطة معينة ولتكن (1,0) فمتجه الحقل على هذه النقطة هو (2,-2) لان:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (2, -2)$$



متجه الحقل في النقطة *(1,0)*

وبذلك نستنتج ان اتجاه دوران المسارات هي باتجاه عقرب الساعة أي ان صورة الطور هي:



صورة الطور للمنظومة

من تعريف Q_1 و Q_2 نحصل على:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -2i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 2i \\ -i & 1+i \end{bmatrix} = \overline{Q_1}$$

اذا يمكن ان نحصل على الحل الذي يمر بالنقطة (x,y) عند t=0 هو

$$X(t) = e^{4t}[cos2t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - sin2t \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

Refences/المصادر

[1] A. Gray, M. Mezzino, and M. A. Pinsky, Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica, Springer, New York, 1997

[2] C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer, New York, 1999

[3] E. A. Coddington and N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 1955.

[4] F. R. Gantmacher, Applications of the Theory of Matrices, Interscience, New York, 1959.

[5] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd ed., Springer, Berlin, 2000.

[6] K. Falconer, Fractal Geometry, Benjamin/Clummings Publishing, Menlo Park, 1986

[7] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[8] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2002.

[9] S. P. Hastings and J. B. McLeod Classical Methods in Ordinary Differential Equations: With Applications to Boundary Value Problems, Amer. Math. Soc.,Rhode Island, 2011.

[10] V. I. Arnold. Ordinary Differential Equations. MIT Press, 1978